Generaliserede egenvektorer

$A : V \to V$ en lineær afbildning, λ en egenværdi.

Definition

1. $\mathbf{v} \in V$ kaldes generaliseret egenvektor for A svarende til egenværdi λ hvis der findes $j > 0$ således at $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^j(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, dvs. $\mathbf{v} \in null(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^j$.
2. $E_\lambda^j(A) := \{\mathbf{v} \in V | (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^j(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} = null(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^j$
3. $\mathbf{v}$ egenvektor på trin j betyder: $\mathbf{v} \in E_\lambda^j(\mathbf{A}) \setminus E_\lambda^{j-1}(\mathbf{A})$.

Lemma

1. $E_\lambda(\mathbf{A}) = E_\lambda^1(\mathbf{A}) \leq \cdots \leq E_\lambda^j(\mathbf{A}) \leq \cdots \leq V$ *er en kæde af underrum.*
2. $T = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) : E_\lambda^{j+1}(\mathbf{A}) \to E_\lambda^j(\mathbf{A})$.

Jordan dekomposition

Theorem

1. *For hver egenværdi λ findes der $1 \leq m_\lambda \leq \dim(V)$ således at $E_\lambda^{m_\lambda}(\mathbf{A}) = E_\lambda^{m_\lambda+1}(\mathbf{A}) = \cdots = E_\lambda^{m_\lambda+r}(\mathbf{A})$ for alle $r > 0$.*
2. *V kompleks vektorrum: $V = E_{\lambda_1}^{m_{\lambda_1}}(\mathbf{A}) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n}^{m_{\lambda_n}}(\mathbf{A})$, dvs. V er direkte sum af underrum af generaliserede egenvektorer svarende til As egenværdier.*
   Specielt kan envher vektor skrives som sum af generaliserede egenvektorer (på entydig vis).

Sæt $U_i := E_{\lambda_i}^{m_{\lambda_i}}(\mathbf{A})$ og $\mathbf{T}_i := (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) : U_i \to U_i$.

$\mathbf{T}_i$ er nilpotent idet $\mathbf{T}_i^{m_{\lambda_i}} = \mathbf{0}$.

Jordan baser

Lemma

Lad $\mathbf{T} : U \to U$ *være nilpotent.*

1. *Så har* U *en Jordan basis på formen*

   $$\mathcal{J} := \{\mathbf{T}^{m_1}(\mathbf{v}_1), \dots, \mathbf{T}(\mathbf{v}_1), \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{T}^{m_k}(\mathbf{v}_k), \dots, \mathbf{T}(\mathbf{v}_k), \mathbf{v}_k\}.$$

   $\{\mathbf{T}^{m_1}(\mathbf{v}_1), \dots, \mathbf{T}^{m_k}(\mathbf{v}_k)\}$ *er en basis for* $null(\mathbf{T}) = E_0(\mathbf{T})$*.*
   $\mathbf{T}^j(\mathbf{v}_i)$ *er egenvektor på trin* $m_i - j + 1$ *(til egenværdi* 0*).*
2. *Med hensyn til en Jordan basis har* $\mathbf{T}$ *en matriks-beskrivelse* $M(\mathbf{T}, \mathcal{J}, \mathcal{J})$ *således at* M *har* 0*-koefficienter undtagen på en parallel til diagonalen (en til højre fra diagonalen). På denne linie kan der stå tallene* 0 *og* 1*.*

Jordans normalform

Theorem

Lad **A** : *V* → *V* *være en lineær selv-afbildning. For et komplekst vektorrum findes der en (Jordan)basis* $\mathcal{J}$ *for V således at* $M(\mathbf{A}, \mathcal{J}, \mathcal{J})$ *består af Jordan-blokke svarende til* **A***s egenværdier. Blokmatricen svarende til egenværdien* λ_j

1. *har en størrelse svarende til den algebr. multiplicitet af* λ_j
2. *er en øvre trekantsmatriks med* λ_j *på alle diagonalpladser,*
3. 0*-taller eller* 1*-taller på nabodiagonalen (en til højre fra diagonalen)*
4. 0*-taller ellers.*

For et reelt vektorrum erstattes en kompleks egenværdi $\omega = \alpha + i\beta$ *med en (diagonal)* 2×2*-blokmatriks*

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$