Liapunov stabilitet

Vi ønsker at undersøge et dynamisk system $X' = F(X)$, hvor $F : U \to \mathbf{R}^n$ er en C^1-funktion på en åben delmængde $U \subseteq \mathbf{R}^n$ i nærheden af et givet ligevægtspunkt $X^* \in U$. Værktøjet er en given differentiabel funktion $L : V \to \mathbf{R}$ defineret på en åben omegn $X^* \in V \subseteq U$.

Sådan en funktion L kaldes en Liapunovfunktion (for F i X^*), hvis den er positiv definit og hvis $\dot{L}$ er negativ semidefinit (i X^* på V) og en strengt Liapunovfunktion hvis $\dot{L}$ endda er negativ definit.

Sætning 0.1 *([1], pp. 194/195)*

1. *Hvis der findes en Liapunovfunktion L for F i X^*, så er X^* et stabilt ligevægtspunkt.*
2. *Hvis der findes en streng Liapunovfunktion L for F i X^*, så er X^* et asymptotisk stabilt ligevægtspunkt.*

I beviset gør vi brug af grænsemængder for en flowlinie (banekurve, trajektorie). Vi skriver $X(t)$ for den flowlinie med begyndelsesværdi X til tidspunkt t: $X(t) = \Phi(X, t)$.

Definition 0.2 *([1], 10.1) For et punkt $X \in U$ – og dermed en banekurve $X(t)$ – defineres*

1. $\omega(X) = \{\lim_{k\to\infty} X(t_k) | \ t_k \to \infty$ *og* $X(t_k)$ *konvergent*$\}$ *– ω-grænsemængden for X;*
2. $\alpha(X) = \{\lim_{k\to\infty} X(t_k) | \ t_k \to -\infty$ *og* $X(t_k)$ *konvergent*$\}$ *– α-grænsemængden for X.*

Selvom det ikke på fohånd er klart at $\lim_{t\to\infty} X(t)$ eksisterer, kan vi dog allerede konkludere:

Lemma 0.3 *Lad L betegne en Liapunovfunktion for F. Så gælder:*

1. *For en følge $t_k \to \infty$ med $Z = \lim_{k\to\infty} X(t_k) \in \omega(X)$ gælder: $L(Z) = \lim_{k\to\infty} L(X(t_k))$.*
2. *L er konstant på $\omega(X)$ og $\lim_{t\to\infty} L(X(t))$ eksisterer og er lig med denne konstante værdi.*
3. *For alle $t \geq 0$ og $Z \in \omega(X)$ gælder: $L(X(t)) \geq L(Z)$ (og $L(X(t)) > L(Z)$ hvis L er streng Liapunov).*

Bevis Lemma.

1. fordi L er kontinuert.
2. Funktionen $t \to L(X(t))$ er aftagende og nedadtil begrænset. Derfor er $\lim_{t\to\infty} L(X(t))$ lig med infimum af mængden $\{L(X(t)) | t \geq 0\}$. Det samme gælder for $\lim_{k\to\infty} L(X(t_k))$ for enhver følge $t_k \to \infty$.

3. For enhver $t \geq 0$ og enhver følge $t_k \to \infty$ findes der et l således at $t < t_l$. Derfor gælder $L(X(t)) \geq L(X(t_l)) \geq L(\lim_{k\to\infty}(X(t_k))$. Den første ulighed er streng for en streng Liapunovfunktion.

Bevis Sætning.

1. Givet en åben delmængde $X^* \in \mathcal{O} \subseteq V$. Vælg $\delta > 0$ tilpas lille således at kuglen (cirkelskiven) med radius $\delta > 0$, $B_\delta(X^*) \subset \mathcal{O}$ – det kan gøres fordi $\mathcal{O}$ er åben. Restriktionen af funktionen L til sfæren (cirklen) $S_\delta(X^*)$ er en kontinuert funktion på den kompakte mængde $S_\delta(X^*)$, som kun antager positive værdier idet L er positiv definit . Den antager derfor på $S_\delta(X^*)$ et minimum $\alpha > 0$!

   Vi ser nu på mængden $\mathcal{O}_1 := \{X \in B_\delta(X^*) | L(X) < \alpha\} \subset B_\delta(X^*)$. Der gælder:

   (a) $\mathcal{O}_1$ er en åben mængde – idet L er kontinuert.

   (b) $X^* \in \mathcal{O}_1$, dvs. $\mathcal{O}_1$ er en åben omegn af X^*.

   (c) $\mathcal{O}_1 \cap S_\delta(X^*) = \emptyset$.

   For $X \in \mathcal{O}_1, t \geq 0$ gælder: $L(X(t)) \leq L(X) < \alpha$. Derfor kan $X(t)$ aldrig krydse $S_\delta(X^*)$ for $t > 0$ og dermed gælder: $X(t) \in \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$: X^* er stabil!

2. I de følgende to trin vises at ω-grænsemængden $\omega(X)$ for ethvert punkt $X \in \mathcal{O}_1$ opfylder: $\omega(X) \cap \mathcal{O}_1 = \{X^*\}$. Dette medfører: $\lim_{t\to\infty} X(t) = X^*$![1]

   (a) For $X \in \mathcal{O}_1$ og en vilkårlig følge $t_n \to \infty$ danner $X(t_n)$ en følge i $\mathcal{O}_1 \subset B_\delta(X^*)$; denne kugle er kompakt (lukket og begrænset) og dermed følgekompakt. Altså findes der en delfølge $t_{n_k} \to \infty$ således at $X(t_{n_k})$ konvergerer mod et element $Z \in B_\delta(X^*)$. Da L er kontinuert gælder:
   $L(Z) = \lim_{k\to\infty} L(X(t_{n_k})) < L(X) < \alpha$ og dermed $Z \in \omega(X) \cap \mathcal{O}_1$.

   (b) Vi vil nu vise at $\omega(X)$ ikke kan indeholde andre punkter end X^* – ved et indirekte bevis: Antag at $Z \in \omega(X), Z \neq X^*$. Så findes der en følge $t_k \to \infty$ med $\lim X(t_k) = Z$. Da L er positiv definit, gælder $L(Z) > 0 = L(X^*)$.

   Vi betragter nu banekurven $Z(s)$ med begyndelsesværdi $Z(0) = Z$. Idet $\dot{L}$ er negativ definit, gælder $\frac{d}{ds}L(Z(s)) < 0$ og L er dermed strengt aftagende langs med $Z(s)$. For et givet $s > 0$ gælder altså: $L(Z(0)) - L(Z(s)) = L(Z) - L(Z(s)) > 0$.

   Nu udnytter vi to kendsgerninger:

   i. Flowet Φ for systemet givet ved F afhænger *kontinuert* af begyndelsesbetingelserne.

   ii. L er kontinuert.

[1] Hvorfor? Prøv f.eks. et indirekte bevis.

Som konsekvens er den sammensatte afbildning $X \mapsto L(\Phi(X,s)) = L(X(s))$ kontinuert for enhver værdi $s > 0$. Givet $\varepsilon > 0$ findes der derfor $\delta > 0$ således at

$$|Y - Z| < \delta \Rightarrow |L(Y(s)) - L(Z(s))| < \varepsilon.$$

Vælges $\varepsilon = L(Z) - L(Z(s))$ findes der altså et $\delta > 0$ således at
$|Y - Z| < \delta \Rightarrow L(Y(s)) = L(Z(s)) + L(Y(s)) - L(Z(s)) < L(Z(s)) + L(Z) - L(Z(s)) = L(Z)$.

Idet $\lim_{k\to\infty} X(t_k) = Z$, findes der – for δ valgt som ovenover – et naturligt tal $K > 0$ således at $k \geq K \Rightarrow |X(t_k) - Z| < \delta$, og derfor, med $Y = X(t_k)$:
$L(X(t_k + s)) = L(\Phi(X(t_k), s)) < L(Z)$.

Da L er strengt monotont aftagende på banekurven $X(s)$ gælder der på den anden side med Lemma 0.3.(3): $L(Z) < L(X(t_k + s))$. Disse to konklusioner modstrider hinanden, altså kan Z ikke være et ω-grænsepunkt for banekurven.

Bemærkning. I beviset indgår, at differentialligningssystemet $X' = F(X)$ har en (entydigt bestemt) løsning $X(t)$ for alle $X \in \mathcal{O}_1$ som *lever for evigt*: $X(t)$ er givet for $t \geq 0$. Eksistenssætningen leverer en løsning på et (maksimalt) interval I. Hvorfor kan dette interval ikke have en *endelig* øvre grænse T? I så fald ligger $X(t) \in \mathcal{O}_1$ for $t < T$ og $X_T := \lim_{t\to T} X(t)$ eksisterer og er indeholdt i $B_\delta(X^*)$. Da L er monotont aftagende gælder desuden: $L(X_T) < \alpha$ og derfor: $X_T \in \mathcal{O}_1$. Derfor kan man løse begyndelsesværdiproblemet med $Y(0) = X(T)$, ovenikøbet indenfor $\mathcal{O}_1$, og herefter "stykke de to løsninger $X(t)$ og $Y(s)$ sammen til en der lever længere end til $t = T$". Man kan alternativt benytte [1], Corollary på s. 397.

Litteratur

[1] M.W. Hirsch, S. Smale, R.L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems & and Introcuction to Chaos*, 2nd ed., Elsevier, 2004