Løsningsforslag til Fitzpatrick, opgave 2.4.12

1. Ved induktion bevises: Hvis $0 < x_1$ og $x_1^2 - x_1 - c < 0$ så gælder (I_n) for alle $n \in \mathbf{N}$: $(I_n) : x_n^2 - x_n - c < 0$.
   (I_1) er forudsat.
   $(I_k) \Rightarrow (I_{k+1})$: $(I_k) : x_k^2 - x_k - c < 0 \Rightarrow x_k < \sqrt{x_k + c} \Rightarrow x_{k+1}^2 - x_{k+1} - c = x_k + c - \sqrt{x_k + c} - c = x_k - \sqrt{x_k + c} < 0$, dvs. (I_{k+1}).

2. Med udgangspunkt i (1) vises: $x_n < x_{n+1}$ for alle $n \in \mathbf{N}$; følgen (x_n) er monotont voksende:
   $x_n^2 < x_n + c = x_{n+1}^2 \Rightarrow 0 < x_n < x_{n+1}$.

3. $x_n^2 - x_n - c < 0 \Rightarrow (x_n - \frac{1}{2})^2 < c + \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1-\sqrt{4c+1}}{2} < x_n < \frac{1+\sqrt{4c+1}}{2}$.
   Følgen er opadtil begrænset ved $\frac{1+\sqrt{4c+1}}{2}$.

4. Tilsvarende vises: Hvis $x_1^2 - x_1 - c > 0$, så er følgen (x_n) monotont aftagende og nedadtil begrænset ved $\frac{1+\sqrt{4c+1}}{2}$.

5. Monoton konvergens: Følgen x_n konvergerer mod supremum, hhv. infimum a: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

6. $a^2 - a - c = (\lim x_n)^2 - \lim x_n - c = (\lim x_{n+1})^2 - \lim x_n - c = \lim x_{n+1}^2 - \lim x_n - c = \lim[x_{n+1}^2 - x_n - c] = 0$. Grænseværdien løser altså ligningen.
   Da følgen (x_n) er monotont voksende (i det 1. tilfælde) og $\frac{1-\sqrt{4c+1}}{2} < x_n$, så gælder $a = \frac{1+\sqrt{4c+1}}{2}$.