Kæderegel – differentiation af sammensatte funktioner

Vi viser en version af kædereglen, som ikke forudsætter at de enkelte funktioner er C^1 – med et bevis som udelukkende gør brug af definitionerne og ikke af middelværdisætningen.

Theorem 0.1. *Givet åbne (definitions-)mængder $O \subseteq \mathbf{R}^n, U \subseteq \mathbf{R}^m$ og funktioner $F : O \to \mathbf{R}^m, G : U \to \mathbf{R}^n$ således at $F(O) \subseteq U$. Desuden et punkt $\mathbf{x}_0 \in O$, således at F er differentiabel i $\mathbf{x}_0$ og G er differentiabel i $F(\mathbf{x}_0)$.*
Konklusion: Den sammensatte funktion $G \circ F$ er differentiabel i $\mathbf{x}_0$ og Jacobi-matricerne opfylder:

$$D(G \circ F)(\mathbf{x}_0) = DG(F(\mathbf{x}_0))DF(\mathbf{x}_0). \tag{1}$$

Bevis. F differentiabel i $\mathbf{x}_0$ betyder:

$$F(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x}_0) = DF(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \| \mathbf{h} \| S_2(\mathbf{h}) \text{ med } \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} S_2(\mathbf{h}) = \mathbf{0}.^1 \tag{2}$$

G differentiabel i $\mathbf{y}_0$ betyder:

$$G(\mathbf{y}_0 + \mathbf{k}) - G(\mathbf{y}_0) = DG(\mathbf{y}_0)\mathbf{k} + \| \mathbf{k} \| S_1(\mathbf{k}) \text{ med } \lim_{\mathbf{k}\to\mathbf{0}} S_1(\mathbf{k}) = \mathbf{0}. \tag{3}$$

$G \circ F$ differentiabel i $\mathbf{x}_0$ betyder:

$$(G \circ F)(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - (G \circ F)(\mathbf{x}_0) = D(G \circ F)(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \| \mathbf{h} \| S_3(\mathbf{h}) \text{ med } \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} S_3(\mathbf{h}) = \mathbf{0}. \tag{4}$$

Vi indsætter $\mathbf{y}_0 = F(\mathbf{x}_0), \mathbf{k} = F(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x}_0)$ fra (1) i (1) og får:

$$\begin{aligned} G(F(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h})) - G(F(\mathbf{x}_0)) &= DG(F(\mathbf{x}_0))\mathbf{k} + \| \mathbf{k} \| S_1(\mathbf{k}) \\ &= DG(F(\mathbf{x}_0))(F(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x}_0)) + \| \mathbf{k} \| S_1(\mathbf{k}) \\ &= DG(F(\mathbf{x}_0))DF(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + DG(F(\mathbf{x}_0))(\| \mathbf{h} \| S_2(\mathbf{h})) + \| \mathbf{k} \| S_1(\mathbf{k}) \\ &= DG(F(\mathbf{x}_0))DF(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \| \mathbf{h} \| S_3(\mathbf{h}) \end{aligned}$$

med $S_3(\mathbf{h}) = DG(F(\mathbf{x}_0))S_2(\mathbf{h}) + \frac{\|\mathbf{k}\|}{\|\mathbf{h}\|} S_1(\mathbf{k})$.

Ifølge (4) fås differentiabilitet af $G \circ F$ i $\mathbf{x}_0$ og kædereglen (1) hvis blot vi kan vise at $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} S_3(\mathbf{h}) = \mathbf{0}$:

1. Fra (1) udnyttes at $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} S_2(\mathbf{h}) = \mathbf{0}$. Da matricen $DG(F(\mathbf{x}_0))$ ikke varierer med $\mathbf{h}$ gælder: $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} DG(F(\mathbf{x}_0))S_2(\mathbf{h}) = DG(F(\mathbf{x}_0)) \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} S_2(\mathbf{h}) = DG(F(\mathbf{x}_0))\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

2. Da F er differentiabel i $\mathbf{x}_0$, er funktionen også kontinuert der, dvs. $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \mathbf{k} = \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}(F(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x}_0)) = \mathbf{0}$ og derfor $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} S_1(\mathbf{k}) = \mathbf{0}$. Desuden gælder:
$\frac{\|\mathbf{k}\|}{\|\mathbf{h}\|} = \| DF(\mathbf{x}_0)\frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} \| + \| S_2(\mathbf{h}) \| \leq \| DF(\mathbf{x}_0) \| + 1$ for $\mathbf{h}$ lille.[2] Specielt er $\frac{\|\mathbf{k}\|}{\|\mathbf{h}\|}$ *begrænset* tæt på $\mathbf{h} = \mathbf{0}$.

Fra 1.og 2. konkluderer vi: $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} S_3(\mathbf{h}) = \mathbf{0}$.

□

[1] $S_i(\mathbf{u}) = \frac{R_i(\mathbf{u})}{\mathbf{u}}$.
[2] Her bruges Cauchy-Schwarz uligheden for matricer og (3): $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} S_2(\mathbf{h}) = \mathbf{0}$.

RAUSSEN@MATH.AAU.DK 9940 8855 FREDRIK BAJERSVEJ 7G
HTTP://WWW.MATH.AAU.DK/~RAUSSEN - 9220 AALBORG ØST