Repetition og 1. Forelæsning

kl. 8:15 – 9:20 i lokale G5-112.

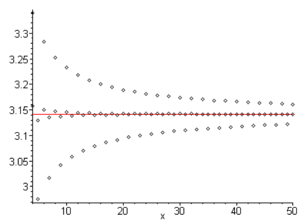
Repetition:

Supremum og infimum. Arkimedes prinicip. Rationale og irrationale tal ligger tæt inden for de reelle tal.

Mål og indhold:

Et nøgleord for hele kurset er konvergens. Som det første skal det studeres for følger af reelle tal. En reel talfølge er en funktion $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$; som oftest skriver man $a_n = f(n)$ og tænker på en ordnet følge $a_1, a_2, a_3, \cdots$ som fortsætter (efter en regel givet ved f) til det uendelige.

Det er vigtigt at forstå definitionen på konvergens på s. 26. Jeg tænker på den som en konkurrence mod den (onde) modstander[1], som jeg skal overbevise om, at følgen a_n konvergerer mod tallet a ($\lim_{n\to\infty} a_n = a$). Hun/han udfordrer mig med et meget lille tal ε, måske $\varepsilon = 10^{-10}$. Så skal jeg være i stand til at svare med et (stort) tal N således at $|a_n - a| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$. Og hvis modstanderen kommmer med et værre krav, f.eks. $\varepsilon = 10^{-20}$, så skal jeg stadigvæk kunne modsvare med et (større?) tal N med en tilsvarende egenskab. Faktisk skal jeg kunne klare en hvilken som helst udfordring $\varepsilon > 0$.



Og så en udfordring til jer: Hvad betyder det at følgen a_n ikke konvergerer mod a i dette spilsprog? Selvfølgelig det at modstanderen vinder, og hvad vil det så sige?

Nu skal der arbejdes med definitionen. Arkimedes princip er ensbetydende med at $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. For at afgøre konvergens af en "ny" følge sammenligner man ofte med en anden følge, som man allerede er fortrolig med (sammenligningslemma, p. 28).

Litteratur:

[PF] Fitzpatrick, *Advanced Calculus*, ch. 2.1, pp. 23 – 28.

Opgaveregning:

kl. 9:25 – 11:20 i grupperummene.

Opgaver:

1.3, pp. 19 – 22 4, 7, 8.

2.1, pp. 32 – 35 2a, 6[2], 8, 11[3].

2. Forelæsning

kl. 11:25 – 12:00 i G5-112.

Mål og indhold:

Konvergens skal ikke undersøges forfra hver gang man møder en ny følge. Hvis man kan identificere den som sum, differens, produkt eller kvotient af konvergerende følger, så konvergerer den nye følge også[4], og det mod summen, differensen, produktet, hhv. kvotienten af grænseværdierne af bestanddelene.

[1]Noget for spillefuglene blandt tilhørerne!
[2]Prøv at vælge et smart $\varepsilon > 0$
[3]Tænk først over, på hvilken måde disse "definitioner" adskiller sig fra den rigtige
[4]OK, man skal være lidt forsigtig, nævneren i en kvotientfølge må ikke konvergere mod 0

To umiddelbare konsekvenser:

- Grænseværdidannelsen er lineær (2.16).
- Indsætter man en konvergent følge med grænseværdi a i et polynomium p, så fås en konvergent følge med grænseværdi $p(a)$. Egenskaben kan generaliseres til kvotienter af polynomier (brudne rationale funktioner).

Litteratur:

[PF] Fitzpatrick, *Advanced Calculus*, ch. 2.1, pp. 28 – 32.

Næste gang:

Torsdag, den 17.9., kl. 8:15 – 12:00.
Begrænsede følger, lukkede mængder.
Monoton konvergens, konvergens af intervaller.
Følgekompakthed, Bolzano-Weierstrass.
Fitzpatrick, ch. 2.2 – 2.4, pp. 35 – 46.