Repetition og Perspektivering:

kl. 8:15 – 8:35 i lokale G5-112.
Tætte og lukkede delmængder. Monoton konvergens. Intervalrusesætningen. Bolzano-Weierstrass sætningen.

1. forelæsning:

kl. 8:45 – 9:20 i lokale G5-112.

Mål og indhold:

Efter beviset for Bolzano-Weierstrass sætningen (se plan for 3. lektion) begynder vi med et nyt emne: Kontinuerte funktioner defineret på delmængder af de reelle tal med værdier inden for de reelle tal. Lærebogen definerer kontinuitet (på p. 53) ved hjælp af talfølger; senere (i afsnit 3.5) ser vi på en ækvivalent definition som ikke tager udgangspunkt i talfølger.
Det er ikke ret vanskeligt at overbevise sig om, at summer, produkter og kvotienter af kontinuerte funktioner er kontinuerte igen; specielt er polynomier og rationale funktioner kontinuerte. Sammensætningen af kontinuerte funktioner er igen kontinuert.

Litteratur:

[PF] Fitzpatrick, *Advanced Calculus*, ch. 2.4 – 2.5, pp. 45 – 48, ch. 3.1, pp. 53 – 57.

Opgaveregning:

kl. 9:25 – 11:20 i grupperummene.

Opgaver:

2.3,pp. 42 – 43 5[1] – 7.

2.4, pp. 46 – 47 Afleveringsopgave: 12.[2]

3.1, pp. 57 – 58 3 – 5.

Sørg for at I får arbejdet med mindst en opgave per afsnit!
Jeg foreslår at I arbejder sammen om afleveringsopgaven i grupper a to studerende; det I ikke når denne gang, kan I arbejde videre med næste gang. Afleverede opgaver (senest i slutningen af ugen) rettes og kommenteres hurtigst muligt.

2. forelæsning

kl. 11.25 – 12:00 i lokale G5-112.

Mål og indhold:

Den første vigtige sætning (Thm. 3.9) om kontinuerte funktioner handler om ekstremumsværdier: En kontinuert funktion antager både maksimum og minimum på lukkede og begrænsede intervaller.

I beviset godtgør man at værdimængden $S = f([a,b])$ på et lukket interval $[a,b]$ er begrænset; dermed har den både supremum og infimum. Så skal vi gøre rede for at supremum faktisk antages som værdi $f(x_0)$ for et passende $x_0 \in [a,b]$. Nøglen i beviset er Bolzano-Weierstrass sætningen.

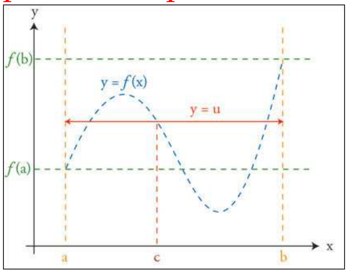
Kontinuerte funktioner på et interval $[a,b]$ har en anden vigtig egenskab ("mellemværdier", "nul huller", Thm. 3.11[3]: Ethvert tal c mellem randværdierne $f(a)$

[1] Binomialformel: se s. 19

[2] Forslag: Afprøv metoden for $c = \frac{3}{4}$ og $x_1 = 1$, hhv. $x_1 = 2$ vha. lommeregner eller calculator på computer.
Vink: betragt først tilfældet $x_1^2 - x_1 - c < 0$; vis ved induktion: $x_n^2 - x_n - c < 0$, $x_n < x_{n+1}$ og brug Sætning om monoton konvergens (Thm. 2.25) til at vise at $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ eksisterer. Hvad gælder om $a^2 - a - c$?

[3] Bevis: næste gang!

og $f(b)$ antages som værdi i mindst et punkt x_0 på intervallet: $f(x_0) = c$.



(I figuren ovenfor: $f(c) = u$ i stedet for $f(x_0) = c$.)

Man kan reformulere denne egenskab af kontinuerte funktioner meget handy således (Thm. 3.14):
Værdimængden $f(I)$ af et interval I under en kontinuert funktion $f : I \to \mathbf{R}$ er igen et interval.

Litteratur:

PF Fitzpatrick, *Advanced Calculus*, ch. 3.2 – 3.3, pp. 58 – 65 undtagen bevis for mellemværdisætning og Eks. 3.12.

Wikipedia Extreme value theorem, Intermediate value theorem

YouTube Intermediate Value Theorem.[4]

Næste gang:

Onsdag, 23.9., kl. 8:15 – 12:00 i G5-112.
Bevis for mellemværdisætning. Uniform kontinuitet. $\varepsilon - \delta$ kriterier for kontinuitet og uniform kontinuitet. Monotone kontinuerte funktioner.
Fitzpatrick, ch. 3.3 – 3.6, pp. 66 – 76.

[4]med regnefejl!