Repetition og Perspektivering:

kl. 8:15 – 8:35 i lokale G5-112.
Middelværdisætninger og anvendelser.

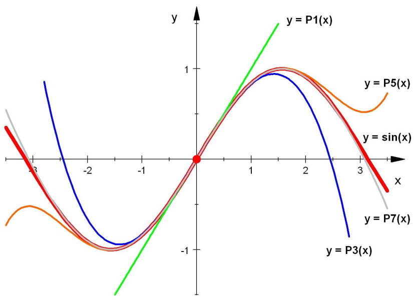
1. forelæsning:

kl. 8:45 – 9:20 i lokale G5-112.

Mål og indhold:

En sidste anvendelse af den generaliserede middelværdisætning – som ikke er indeholdt i bogen – kaldes l'Hôpitals sætning. I den simpleste form siger den: Hvis $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ eller $\pm\infty$ og hvis $\lim_{x\to c} f'(x)/g'(x)$ eksisterer, så gælder $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Den bedste lineære approksimation til en differentiabel funktion f i en omegn af et punkt x_0 beskriver tangentlininen til grafen for f gennem $(x_0, f(x_0))$. Denne linie har 1ste ordens kontakt med grafen for funktionen. Hvis funktionen f er n gange differentiabel, så kan man på lignenede vis finde den bedste approksimation ved et n-te grads polynomium i en omegn af x_0. Dette Taylorpolynomium er det eneste polynomium af graden n som har de samme afledede som f op til grad n i punktet x_0.



Hvad kan man sige om forskellen mellem funktionen f og dens approksimation gennem Taylorpolynomiet p_n af orden n i x_0? Hvis n er $n+1$ gange differentiabel, så kan restleddet $R_n(x)$ kan udtrykkes på formen (à la Lagrange)

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{n!}(x - x_0)^{n+1}$$

hvor c er et (som regel ukendt) tal som ligger (strengt) mellem x og x_0. Beviset for dette er en nem konsekvens af den generaliserede middelværdisætning (Cauchys MVS). Dette viser, at p_n er det eneste polynomium af en grad højst n med egenskaben $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-p(x)}{(x-x_0)^n} = 0$. (Denne egenskab giver en bedre forståelse for kontakt af orden n).

Litteratur:

Wikipedia L'Hôpital's rule

PF Fitzpatrick, *Advanced Calculus*, ch. 8.1 – 8.2, pp. 199 – 204.

Opgaveregning:

kl. 9:25 – 11:20 i grupperummene.

Opgaver:

4.3, pp. 108 – 110 3, 8[1], 20.

4.4, pp. 112 – 113 5, 6.

8.1, p. 202 3.

8.2, pp. 207 – 209 1.[2]

2. forelæsning

kl. 11.25 – 12:00 i lokale G5-112.

[1] Find, om muligt, et lokalt minimum og et lokalt maksimum for funktionen $f(x) = x^3 + ax + b$
[2] Bestem Taylorpolynomierne af orden 1 og 2 til funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ i punktet $x_0 = 1$.

Mål og indhold:

Hvis en funktion er uendelig mange gange differentiabel, så kan man definere Taylorpolynomier af en vilkårlig orden. Ofte, men ikke altid, kan man endda bestemme en grænsefunktion, givet ved Taylorrækken

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

som grænseværdi af værdierne af Taylorpolynomierne. Gennem en vurdering af restleddet finder man ud af, at at denne grænseværdi eksisterer for alle x i et interval I omkring udviklingspunktet x_0 og at den er lig med $f(x)$ – under forudsætning af at der findes en konstant M således at $|f^{(n)}(x)| \leq M^n$ for alle x i intervallet. Funktioner der kan beskrives ved (Taylor-)rækker, kaldes analytiske funktioner. Langt fra alle differentiable funktioner er også analytiske.

Funktioner, som (inden for et interval) stemmer overens med en Taylorrække, kaldes analytiske. Et eksempel på en uendleig mange gange differentiabel funktion, som ikke er analytisk, er givet ved funktionen $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. Alle afledede $f^{(k)}(0) = 0$, Taylorrækken beskriver altså en konstant funktion, som beskriver den oprindelige funktion kun i $x_0 = 0$!

Litteratur:

PF Fitzpatrick, *Advanced Calculus*, ch. 8.2 – 8.3, pp. 204 – 211.

Wikipedia Analytic function

Næste gang:

Torsdag, den 5.11.2009, kl. 8:15 – 12:00.
Følger i $\mathbf{R}^n$. Åbne og lukkede mængder i $\mathbf{R}^n$.
Fitzpatrick, ch. 10.2 – 10.3, pp. 277 - 288.