Repetition og Perspektivering:

kl. 8:15 – 8:35 i lokale G5-112.
Tangentplan. Jacobi-matrix, differential som 1. ordens approximation.

1. forelæsning:

kl. 8:45 – 9:20 i lokale G5-112.

Mål og indhold:

Overordnet siger kædereglen, at den bedste lineære approksimation for sammensætningen af to differentiable afbildninger er givet som sammensætningen af de bedste lineære approksimationer for dem hver især:

$$\mathbf{D}(\mathbf{G}\circ\mathbf{F})(\mathbf{x}) = \mathbf{DG}(\mathbf{F}(\mathbf{x}))\cdot \boldsymbol{D}\boldsymbol{F}(\mathbf{x}).$$

Sagt på den måde, er reglen indlysende, let at huske, uden at man behøver at tænke på indviklede trædiagrammer (jvf. basisår).

Først vises sætningen i det specielle tilfælde (Theorem 15.34), at G er en funktion med reelle (i stedet for vektor-) værdier; her er der altså tale om udregning af en gradient. Sidst ser vi på en harmonisk afbildning fra planen ind i de reelle tal – de bliver emnet for afleveringsopgaverne.

Litteratur:

PF Fitzpatrick, *Advanced Calculus*, ch. 15.3, pp. 414 – 419.

Wikipedia Chain rule for several variables

Opgaveregning:

kl. 9:25 – 11:20 i grupperummene.

Opgaver:

Aflerveringsopgave:

15.3, pp. 419 – 420 3 – 7[1]

Lige som sidste gang: Jeg foreslår at I arbejder sammen om afleveringsopgaven i grupper a to studerende; det I ikke når denne gang, kan I arbejde videre med næste gang. Afleverede opgaver (senest i slutningen af ugen) rettes og kommenteres hurtigst muligt.

2. forelæsning

kl. 11.25 – 12:00 i lokale G5-112.

Mål og indhold:

Vi vender tilbage til talfunktioner af flere variable. Kan man ved differentiation finde ud af hvor en sådan funktion f antager (lokale) ekstrema? Kort sagt skal man først finde funktionens kritiske punkter $\mathbf{x}_0$ – med $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, dvs. horizontal tangentplan – en nødvendig betingelse for et lokalt ekstremum. Herefter bestemmes funktionens Hesse matrix $\nabla^2 f(\mathbf{x}_0)$, en kvadratisk matriks med de anden ordens partielle afledede $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)$ som koefficienter. Hvis funktionen f er C^1, så er denne matriks symmetrisk.

Ludwig Otto Hesse (1811-1874)

[1]Overvej først at matricen $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ er på formen $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \pm\sin\theta & -\pm\cos\theta \end{bmatrix}$ for en passende vinkel θ. Hvad har det med Cauchy-Riemann ligningerne fra Opgave 5. at gøre?

RAUSSEN@MATH.AAU.DK
9940 8855
FREDRIK BAJERSVEJ 7G
HTTP://WWW.MATH.AAU.DK/~RAUSSEN -
9220 AALBORG ØST

Enhver kvadratisk matrix A definerer en kvadratisk form $Q(\mathbf{x}) =< A\mathbf{x}, \mathbf{x} >$, et homogent anden ordens polynomium (af flere variable). Hvis Q kun antager positive (hhv. negative) værdier for $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, så kaldes A positiv definit (hhv. negativ definit) og indefinit ellers. Hvis $A = \nabla f(\mathbf{x}_0)$ er Hesse matricen i et kritisk punkt $\mathbf{x}_0$, så svarer denne form (på nær en additiv og en multiplikativ konstant) til anden ordens Taylorpolynomiet for funktionen i punktet.

Vi skal (næste gang) se at positiv definite Hessianter står for lokale minima og negativ definite Hessianter for lokale maksima.

Litteratur:

PF Fitzpatrick, *Advanced Calculus*, ch. 14.2, pp. 380 – 386.

Wikipedia Hessian matrix

Næste gang:

Torsdag, den 26.11.2009.
Hesse matrix og lokale ekstrema.
Fitzpatrick, ch. 14.3, pp. 385 – 392.

RAUSSEN@MATH.AAU.DK 9940 8855 FREDRIK BAJERSVEJ 7G
HTTP://WWW.MATH.AAU.DK/~RAUSSEN - 9220 AALBORG ØST