Repetition og Perspektivering:

kl. 8:15 – 8:35 i lokale G5-112.
Sammenhængende og kurvesammenhængende mængder.
Mellemværdisætning og -egenskab.

1. forelæsning:

kl. 8:45 – 9:20 i lokale G5-112.

Mål og indhold:

Først gennemgås flere eksempler på metriske rum; begreberne konvergens, åbne og lukkede mængder og deres indbyrdes forhold "oversættes" fra $\mathbf{R}^n$ til metriske rum.

Herefter defineres Cauchyfølger i metriske rum. Bemærk at der i definitionen ikke tales om konvergens endsige om en grænseværdi. Men en Cauchyfælge i $\mathbf{R}^n$ eller mere generelt i en lukket delmængde af $\mathbf{R}^n$ konvergerer altid – uden at man nødvendigvis kan bestemme grænseværdien eksplicit. Et metrisk rum med denne egenskab – at enhver Cauchyfølge konvergerer i rummet - kaldes fuldstændigt.

Litteratur:

PF Fitzpatrick, *Advanced Calculus*, ch. 12.1 – 12.2, pp. 318 – 323.

Wikipedia Complete metric space

Opgaveregning:

kl. 9:25 – 11:20 i grupperummene.

Opgaver:

11.4, p. 313 4 – 7.[1]

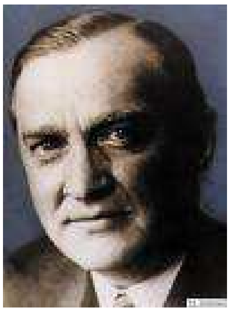
12.1, p. 321 1[2], 9 – 10.

2. forelæsning

kl. 11.25 – 12:00 i lokale G5-112.

Mål og indhold:

Vi viser Banachs fixpunktsætning også kaldet kontraktionssætningen: En kontraktion er en afbildning $f : X \to Y$ mellem metriske rum således at afstanden mellem billedpunkter er måleligt mindre end afstanden mellem originalpunkterne; sådan en afbildning er automatisk kontinuert. Sætningen omhandler kontraktioner fra et metrisk rum X i sig selv.



Stefan Banach (1892 – 1945)

Banachs fixpunktsætning En kontraktion $T : X \to X$ fra et fuldstændigt metrisk rum i sig selv har netop et fixpunkt $p \in X$: $T(p) = p$.

Fixpunktet findes på følgende måde: Man vælger et vilkårligt punkt $p_0 \in X$ og danner en følge $p_{k+1} = T(p_k) = T^k(p_0)$. Da T er en kontraktion, er følgen en Cauchy-følge, som konvergerer mod – fixpunktet!

Et godt eksempel for en kontraktion består af modellen af en bygning som står i selve bygning. Hvor findes fixpunktet for denne kontraktion hen?

[1] I 5 skal man finde ud af at man kan vælge det *samme* $r > 0$ for alle $\mathbf{u} \in K$. Prøv med et modstridsargument: For hvert $n \in \mathbf{N}$ findes $\mathbf{u}_n \in K$ således at $B_{\frac{1}{n}}(\mathbf{u}_n) \not\subseteq O$. Hvordan kan man udnytte at K er følgekompakt?

[2] Beskriv først komplementærmængden til A

I det kommende semester anvendes Banachs fixpunktsætning til at vise eksistens og entydighed for systemer af differentialligninger – under passende forudsltninger!

Og sådan her husker man sætningen:

If M's a complete metric space,
And non-empty, it's always the case,
If f's a contraction,
Then under its action,
Exactly one point stays in place!

Litteratur:

PF Fitzpatrick, *Advanced Calculus*, ch. 12.2, pp. 324 – 327.

Wikipedia Banach fixed point theorem

Næste – og sidste gang:

Torsdag, den 10.12., kl. 8:15 – 12:00.
Kontinuerte afbildninger mellem metriske rum. Følgekompakte og sammenhængende mængder i metriske rum.
Fitzpatrick, ch. 12.4 – 12.5, pp. 337 – 346.