Matematisk Analyse I 1. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

3.9.2009

Aksiomer for et legeme k

med adddition og multiplikation $k \times k \to k$.
For alle $a, b, c \in k$ gælder:

- $a + b = b + a$
- $(a+b)+c = a+(b+c)$
- Der findes $0 \in k$ således at $0 + a = a$
- Der findes a' således at $a + a' = 0$
- $1 \neq 0$
- $ab = ba$
- $(ab)c = a(bc)$
- Der findes $1 \in k$ således at $1a = a$
- $a \neq 0 \Rightarrow$ Der findes $\tilde{a}$ således at $a\tilde{a} = 1$

Ordensaksiomer for reelle tal

R indeholder de positive tal $\mathcal{P}$ med følgende egenskaber:

- $a, b \in \mathcal{P} \Rightarrow a + b, ab \in \mathcal{P}$;
- Ethvert $a \in$ **R** har netop en af de følgende tre egenskaber: $a \in \mathcal{P}, -a \in \mathcal{P}, a = 0$.

$a > b \Leftrightarrow a - b \in \mathcal{P}$.

Konsekvenser:

- $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$;
- $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$;
- $c > 0, a > b \Rightarrow ac > bc$;
- $c < 0, a > b \Rightarrow ac < bc$;

Supremum og Infimum

for en delmængde $\emptyset \neq S \subseteq \mathbf{R}$

Definition

1. c kaldes øvre grænse for S hvis $x \leq c$ for alle $x \in S$.
2. S kaldes opadtil begrænset hvis S har en øvre grænse.
3. Hvis S er opadtil begrænset, så er $\sup S \in \mathbf{R}$ (supremum) dens mindste øvre grænse:
   For enhver øvre grænse $b \in \mathbf{R}$ gælder: $\sup S \leq b$.

Fuldstændighedsaksiom

Enhver opadtil begrænset delmængde $S \subseteq \mathbf{R}$ har et supremum $\sup S \in \mathbf{R}$.

Tilsvarende: Infimum for nedadtil begrænsede mængder.
Eksistens følger af fuldstændighedsaksiomet.

Arkimedes princip

Theorem

1. *For ethvert $c \in \mathbf{R}$ findes der et naturligt tal $n \in \mathbf{N}$ således at $n > c$.*
2. *For ethvert $\varepsilon > 0$ findes der et naturligt tal $n \in \mathbf{N}$ således at $\frac{1}{n} < \varepsilon$.*

Tætte delmængder
Rationale og irrationale tal ligger tæt inden for de reelle tal

Definition

$S \subseteq \mathbf{R}$ ligger tæt i $\mathbf{R}$ hvis ethvert interval $(a, b) \subset \mathbf{R},\ a < b$. indeholder et element fra S.

Theorem

1. $\mathbf{Q}$ *ligger tæt i* $\mathbf{R}$.
2. $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ *ligger tæt i* $\mathbf{R}$.

Egenskab af en mængde S som ligger tæt i $\mathbf{R}$:

- I ethvert interval $(a, b) \subset \mathbf{R},\ a < b$, ligger der uendelig mange elementer fra S.