Matematisk Analyse I 2. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

10.9.2009

Konvergens af talfølger

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$

Definition

En talfølge (a_n) **konvergerer mod** $a \in \mathbf{R}$ såfremt:
Til **ethvert** tal $\varepsilon > 0$ findes der $N \in \mathbf{N}$ således at

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

I givet fald er grænseværdien a entydig.

Definition

En talfølge (a_n) **konvergerer mod** $a \in \mathbf{R}$ såfremt:
Til **ethvert** tal $\varepsilon > 0$ findes der $N \in \mathbf{N}$ således at

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

I givet fald er grænseværdien a entydig.

$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon.$
$\lim_{n\to\infty} a_n \neq a \Leftrightarrow$
$\exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbf{N}\ \exists n \geq N : |a_n - a| \geq \varepsilon.$
(I så fald konvergerer (a_n) slet ikke eller mod et tal $b \neq a$)

$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow$
$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon.$
$\lim_{n\to\infty} a_n \neq a \Leftrightarrow$
$\exists\varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbf{N}\ \exists n \geq N : |a_n - a| \geq \varepsilon.$
(I så fald konvergerer (a_n) slet ikke eller mod et tal $b \neq a$)

Sum, produkt, kvotient af konvergente talfølger

Hvis $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ og $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, så gælder:

- $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$;
- $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$;
- $\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}$ såfremt $b_n \neq 0 \neq b$.

- Limesdannelse er lineær: $\lim_{n\to\infty} \alpha a_n + \beta b_n = \alpha a + \beta b$.
- Ethvert polynomium $p \in \mathbf{R}[X]$ respekterer grænseværdier: $\lim_{n\to\infty} p(a_n) = p(a)$.
- Enhver rational funktion $f = \frac{p}{q} \in \mathbf{R}(X)$ respekterer grænseværdier: $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$ – såfremt $q(a_n) \neq 0 \neq q(a)$.

Sum, produkt, kvotient af konvergente talfølger

Hvis $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ og $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, så gælder:

- $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$;
- $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$;
- $\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}$ såfremt $b_n \neq 0 \neq b$.

- Limesdannelse er lineær: $\lim_{n\to\infty} \alpha a_n + \beta b_n = \alpha a + \beta b$.
- Ethvert polynomium $p \in \mathbf{R}[X]$ respekterer grænseværdier: $\lim_{n\to\infty} p(a_n) = p(a)$.
- Enhver rational funktion $f = \frac{p}{q} \in \mathbf{R}(X)$ respekterer grænseværdier: $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$ – såfremt $q(a_n) \neq 0 \neq q(a)$.