Matematisk Analyse I 3. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

17.9.2009

Begrænsede, tætte og lukkede delmængder $S \subseteq \mathbf{R}$

Definition

$S \subseteq \mathbf{R}$ kaldes

begrænset hvis der findes et tal $M \geq 0$ således at $|x| \leq M$ for alle $x \in S$.

"følgetæt" hvis ethvert tal $x \in \mathbf{R}$ er grænseværdi for en følge $x_n \in S$: $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

lukket hvis der gælder for enhver konvergent følge $x_n \in S$: $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in S$.

Theorem

- *Enhver konvergent følge er begrænset.*
- *Tæt $\Leftrightarrow$ følgetæt.*
- *Et lukket interval $[a, b]$ er lukket.*

Monoton konvergens

Definition

Følgen $\{a_n\}$ kaldes monotont

voksende hvis $a_{n+1} \geq a_n$ for alle $n \in \mathbf{N}$

aftagende hvis $a_{n+1} \leq a_n$ for alle $n \in \mathbf{N}$

Theorem

For en monoton følge $\{a_n\}$ gælder:

- *Følgen konvergerer $\Leftrightarrow$ Følgen er begrænset.*
- *Hvis $\{a_n\}$ er begrænset og*

  voksende: $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n | n \in \mathbf{N}\}$;
  aftagende: $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n | n \in \mathbf{N}\}$;

Intervalrusesætningen

Definition

Intervalruse: En følge af intervaller $I_n = [a_n, b_n]$ således at

- $I_{n+1} \subseteq I_n$ for alle $n \in \mathbf{N}$;
- $\lim_{n\to\infty}[b_n - a_n] = 0$.

Theorem

"Hvordan fanger man et tal i en intervalruse?":
Der eksisterer netop et reelt tal $x \in \bigcap_{n\in\mathbf{N}} I_n$ som ligger i alle intervaller i en intervalruse.

Følgekompakte mængder. Bolzano-Weierstrass

Definition

En delmængde $S \subseteq \mathbf{R}$ kaldes **følgekompakt** hvis enhver følge $\{a_n\},\ a_n \in S$ har en **konvergent delfølge** med grænseværdi $a = \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \in S$.

Theorem

- *Enhver følge af reelle tal har en monoton delfølge.*
- *Enhver begrænset følge har en konvergent delfølge.*

Theorem

Bolzano-Weierstrass: Lad $a < b$.
Intervallet $[a, b]$ er følgekompakt:
Enhver følge $\{x_n\}$ med $x_n \in [a, b]$ har en konvergent delfølge $\{x_{n_k}\}$ og $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in [a, b]$.
Mere generelt: Enhver begrænset og lukket delmængde $S \subset \mathbf{R}$ er følgekompakt.