Matematisk Analyse I 4. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

21.9.2009

Kontinuerte funktioner

Definition

Givet $D \subseteq \mathbf{R}$, $x_0 \in D$ og en funktion $f : D \to \mathbf{R}$.
Funktionen f kaldes kontinuert i x_0 hvis der gælder for enhver følge $x_n \in D$ med $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.
Funktionsværdi i grænseværdien = grænseværdi af funktionsværdierne!
Funktionen kaldes kontinuert i D hvis den er kontinuert i ethvert $x_0 \in D$.

Theorem

- *Sum, produkt og kvotient af kontinuerte funktioner (i et punkt) er kontinuerte (i punktet)*
  – for kvotienter: hvis defineret.
- *Sammensætning af kontinuerte funktioner er kontinuerte – hvor defineret.*

Definition

Givet en funktion $f : D \to \mathbf{R}$.
Funktionen f antager sit maximum i $x_+ \in D$ (sit mininum i $x_- \in D$) hvis
$f(x) \leq f(x_+)$ $(f(x) \geq f(x_-))$ for alle $x \in D$.

Theorem

En kontinuert funktion $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ på et lukket interval antager både sit maximum og sit minimum.

Bevis: benytter Bolzano-Weierstrass to gange; for at vise at

- værdimængden $f([a, b])$ er begrænset (og har et supremum);
- dette supremum er indeholdt i værdimængden.

Mellemværdisætningen

“Nul huller”!

Theorem

Givet en kontinuert funktion $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ og et tal c mellem $f(a)$ og $f(b)$.
Der findes et tal $a \leq x_0 \leq b$ således at $f(x_0) = c$.

Beviset benytter intervalrusesætningen.
Anvendelse: Eksistens af reelle rødder i ligninger.