Matematisk Analyse I 5. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

23.9.2009

Definition

En funktion $f : D \to \mathbf{R}$ kaldes ligelig kontinnuert hvis der gælder for ethvert par af følger $\{u_n\}, \{v_n\}$ i D:

$$\lim_{n\to\infty}[u_n - v_n] = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}[f(u_n) - f(v_n)] = 0.$$

Theorem

1. *$f : D \to \mathbf{R}$ ligelig kontinuert $\Rightarrow$ f kontinuert.*
2. *Den modsatte implikation holder ikke generelt.*
3. *$f : [a, b] \to \mathbf{R}$ kontinuert $\Rightarrow$ f ligelig kontinuert.*

Definition

En funktion $f : D \to \mathbf{R}$ kaldes ε-δ – kontinuert i $x_0 \in D$ hvis der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes $\delta > 0$ således at

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Theorem

En funktion $f : D \to \mathbf{R}$ er ε-δ – kontinuert i $x_0 \in D$ hvis og kun hvis den er "følgekontinuert" i x_0.

Herefter: kontinuert i begge tilfælde.
f kaldes ligelig kontinuert hvis der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes $\delta > 0$ (uafhængig af u, v) således at

$$|u - v| < \delta \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \varepsilon.$$

Theorem

For en monoton funktion $f : D \to \mathbf{R}$ gælder:
$f(D)$ er et interval $\Rightarrow$ f kontinuert.

Specielt for $D = I$ (et interval) og f monoton:
f kontinuert $\Leftrightarrow$ $f(I)$ et interval.