Matematisk Analyse I 6. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

24.9.2009

Inverse funktioner til strikt monotone funktioner

$f : D \to \mathbf{R}$ strikt monoton $\Rightarrow f$ injektiv (one-to-one).
$f : D \to f(D)$ er bijektiv og har invers funktion $f^{-1} : f(D) \to D$:

$$f^{-1}(f(x)) = x, x \in D;\ f(f^{-1}(y)) = y, y \in f(D).$$

Theorem

Givet strikt monoton funktion $f : I \to \mathbf{R}$ på interval I.
Så er den inverse funktion $f^{-1} : f(I) \to \mathbf{R}$ kontinuert.

Eksempel: Potensfunktionen $f(x) = x^n, x \geq 0$ har den kontinuerte inverse funktion $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y} = (y)^{\frac{1}{n}}, y \geq 0$.

Grænseværdier

Definition

Givet en delmængde $D \subseteq \mathbf{R}$. Et punkt $x_0 \in D$ kaldes fortætningspunkt for D, hvis der findes en følge $\{x_n\}, x_n \in D, x_n \neq x_0$ således at $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.
$F(D) \subseteq \mathbf{R}$ mængden af alle fortætningspunkter for D.

Punkter i D er enten fortætningspunkter eller isolerede punkter. Resterende fortætningspunkter ligger i D's rand.

Definition

For en funktion $f : D \to \mathbf{R}$ og et punkt $x_0 \in F(D)$ gælder $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow$

- For enhver følge $\{x_n\}, x_n \in D, x_n \neq x_0$ gælder: $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = l \qquad \Leftrightarrow$
- Til ethvert $\varepsilon < 0$ findes $\delta > 0$ således at: $x \in D, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.