Matematisk Analyse I 7. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

1.10.2009

Definition

Givet en funktion $f : I = (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ og et punkt $x_0 \in I$.
Funktionen kaldes differentiabel i x_0 hvis $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ eksisterer. Grænseværdien betegnes med $f'(x_0)$.
f kaldes differentiabel hvis f er differentiabel i alle x_0 in I; og $f' : I \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto f'(x)$ den afledede.

Interpretation for $f'(x_0)$: hældning for tangentlinien med ligningen $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
Tangentlinien er den bedst approksimerende linie ved $(x_0, f(x_0))$; den eneste med 1. ordens kontakt.

Theorem

Hvis f er differentiabel i x_0, så er f også kontinuert i x_0.

Differentiationsregler 1

Theorem

Givet to funktioner $f, g : I \to \mathbf{R}$ som begge er differentiable i $x_0 \in I$. Så gælder:

1. $f + g$ *differentiabel i* x_0, $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
2. fg *differentiabel i* x_0, $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
3. *Hvis* $g(x_0) \neq 0$, *så er* $\frac{f}{g}$ *differentiabel i* x_0, $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Differentiationsregler 2

Inverse funktioner:

Theorem

Givet en streng monoton og kontinuert funktion $f : I \to \mathbf{R}$ *som er differentiabel i* $x_0 \in I$ *med* $f'(x_0) \neq 0$. *Så er den* ***inverse*** *funktion* $f^{-1} : f(I) \to \mathbf{R}$ *differentiabel i* $f(x_0)$ *og* $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$ *(eller* $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$*).*

Kæderegel:

Theorem

Givet $f : I \to \mathbf{R}$, $g : J \to \mathbf{R}$, $f(I) \subseteq J$, $x_0 \in I$.
Hvis f *er differentiabel i* x_0 *og* g *er differentiabel i* $f(x_0)$, *så er den* ***sammensatte funktion*** $g \circ f$ *differentiabel i* x_0 *og* $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.