Matematisk Analyse I 8. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

8.10.2009

Middelværdisætning og generalisering

Theorem

Givet en funktion $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ som er kontinuert og differentiabel på (a, b). Så findes der et punkt $x_0 \in (a, b)$ således at $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Sekanthældning antages som tangenthældning!
Bevis: Konsekvens af Rolle's sætning = det specielle tilfælde $f(b) = f(a)$.

Theorem

Givet funktioner $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ som er kontinuerte og differentiable på (a, b). Så findes der et punkt $x_0 \in (a, b)$ således at $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Konsekvenser 1

- Givet to differentiable funktioner $g, h : I \to \mathbf{R}$ således at $g'(x) = h'(x)$ for alle $x \in I$. Så findes der en konstant c således at $g(x) = h(x) + c$ for alle $x \in I$.
  Bevis: Det specielle tilfælde $h = 0$.
- En differentiabel funktion $f : I \to \mathbf{R}$ med $f'(x) > 0$ for alle $x \in I$ er strengt monotont voksende.
- Hvis en differentiabel funktion $f : I \to \mathbf{R}$ antager et lokalt ekstremum i $x_0 \in I$, så gælder $f'(x_0) = 0$.
  Hvis f er to gange differentiabel og $f'(x_0) = 0$, så gælder:
  $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ antager lokalt minimum i x_0.
  $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ antager lokalt maximum i x_0.

- Hvis en $n+1$ gange differentiabel funktion $f : I \to \mathbf{R}$ opfylder at $f^{(k)}(x_0) = 0, 0 \le k \le n$, så findes der for hvert $x \in I, x \neq x_0$ et punkt c mellem x og x_0, således at $f(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1}$.
- Givet en $n+1$ gange differentiable funktion $f : I \to \mathbf{R}$ og $x_0 \in I$. Så findes der for hvert $x \in I$ et punkt c mellem x og x_0 således at $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1}$.

Funktionen givet ved $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$ kaldes funktionens n-te Taylorpolynomium i x_0. Det har n-te ordens kontakt med funktionen.