Matematisk Analyse I 9. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

29.10.2009

Theorem

Givet to differentiable funktioner i et åbent interval som indeholder c. Hvis $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ *(eller begge* $\pm\infty$*) og hvis* $\lim_{x\to c} f'(x)/g'(x)$ *eksisterer, så gælder*

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Der er ligeledes en variant for $c = \pm\infty$ for funktioner f, som er differentiable for alle store (eller alle små) reelle værdier x.

Taylorpolynomium og restled

Givet en $(n+1)$ gange differentiabel funktion, således at $f^{(n+1)}$ er kontinuert i x_0 (eller bare begrænset i en omegn af x_0).
Så gælder:

$$\lim_{x \to c} \frac{R_n(x_0; x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - p_n(x_0; x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

For et polynomium q af grad højst n gælder:
$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - q(x)}{(x - x_0)^n} = 0 \Rightarrow q(x) = p_n(x_0; x)$.
Dvs.: $p_n(x_0; x)$ er det (eneste) polynomium af grad højst n som approksimerer f bedst i en omegn af x_0.

Taylorrækker

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$
Konvergerer Taylorrækken? Konvergerer den mod $f(x)$?

Theorem

Givet en uendelig mange gange differentiabel funktion $f : I \to \mathbf{R}, x_0 \in I, r > 0$ således at $[x_0 - r, x_0 + r] \subset I$ og en konstant M således at $|f^{(n)}(x)| \leq M^n$ for alle n og alle $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$. Så gælder:
$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k = f(x)$.

Definition

En analytisk funktion $f : I \to \mathbf{R}$ er uendelig mange gange differentiabel og for hvert $x_0 \in I$ konvergerer Taylorrækken $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$ mod $f(x)$ for hvert x i en omegn af x_0.

Funktionen $f(x) = e^{\frac{-1}{x^2}}, x \neq 0;\ f(0) = 0$ er uendelig mange gange differentiabel, men ikke analytisk (i 0).