Matematisk Analyse I 10. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

5.11.2009

Følger i $\mathbf{R}^n$

Afstand i $\mathbf{R}^n$: $dist(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \| \mathbf{u} - \mathbf{v} \|$ – en metrik!

Definition

En følge $\{\mathbf{u}_k\}$ af punkter i $\mathbf{R}^n$ konvergerer mod $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$ ($\lim_{k\to\infty} \mathbf{u}_k = \mathbf{u}$) hvis $\lim_{k\to\infty} \text{dist}(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}) = 0$:
Til hvert $\varepsilon > 0$ findes K således at $k \geq K \Rightarrow \text{dist}(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}) < \varepsilon$.

Grænseværdien er entydig!
$p_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $p_i(u_1, \ldots, u_n) = u_i$: projektion på i-te koordinat.

Theorem

En følge i $\mathbf{R}^n$ konvergerer hvis og kun hvis den konvergerer komponentvis:
$\lim_{k\to\infty} \mathbf{u}_k = \mathbf{u} \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} p_i(\mathbf{u}_k) = p_i(\mathbf{u}), 1 \leq i \leq n.$

lim er en lineær afbildning fra vektorrummet af konvergente følger ind i vektorrumet af reelle tal.

Indre punkter. Åbne og lukkede mængder

Definition

$\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$; $r > 0$; $A \subseteq \mathbf{R}^n$.

- $B_r(\mathbf{u}) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n | \, \mathrm{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) < r\}$;
  (åben kugle med radius r om $\mathbf{u}$).
- $\mathbf{u} \in \mathrm{int}(A) \Leftrightarrow \exists r > 0 : B_r(\mathbf{u}) \subseteq A$ (et indre punkt)
- A åben $\Leftrightarrow A = \mathrm{int}(A)$.

En åben kugle er åben.

Definition

$B \subseteq \mathbf{R}^n$ lukket $\Leftrightarrow$
For enhver konvergent følge $\{\mathbf{u}_k\}$, $\mathbf{u}_k \in B$, gælder:
$\lim_{k\to\infty} \mathbf{u}_k \in B$.

Lukkede kugler, lukkede (hyper)rektangler er lukkede.

Theorem

Komplementærmængder:

1. $A \subseteq \mathbf{R}^n$ *åben* $\Leftrightarrow \mathbf{R}^n \setminus A$ *lukket.*
2. $B \subseteq \mathbf{R}^n$ *lukket* $\Leftrightarrow \mathbf{R}^n \setminus B$ *åben.*

Theorem

- *Foreningsmængder af åbne mængder er åbne.*
- *Snitmængder af lukkede mængder er lukkede.*
- *Snitmængder af endelig mange åbne mængder er åbne.*
- *Foreningsmængder af endelig mange lukkede mængder er lukkede.*

Ydre punkter. Randmængden

Definition

$A \subseteq \mathbf{R}^n$.

- $\mathbf{u} \in \text{ext}(A) \Leftrightarrow \mathbf{u} \in \text{int}(\mathbf{R}^n \setminus A)$ (et ydre punkt)
- $\text{ext}(A) = \text{int}(\mathbf{R}^n \setminus A) \subseteq \mathbf{R}^n \setminus A$.
- *As* rand: $\text{bd}(A) = \mathbf{R}^n \setminus (\text{int}(A) \cup \text{ext}(A)) =$ $\{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n | \forall r > 0 : B_r(\mathbf{u}) \cap A \neq \emptyset \neq B_r(\mathbf{u}) \cap (\mathbf{R}^n \setminus A)$

Theorem

1. $A \subseteq \mathbf{R}^n$ *åben* $\Leftrightarrow A \cap \mathit{bd}(A) = \emptyset$.
2. $B \subseteq \mathbf{R}^n$ *lukket* $\Leftrightarrow \mathit{bd}(B) \subseteq B$.