Matematisk Analyse I 11. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

10.11.2009

Kontinuerte funktioner af flere variable

Definition

En funktion $F : A \to \mathbf{R}^m$, $A \subseteq \mathbf{R}^n$ er kontinuert i $\mathbf{u} \in A$ hvis (et af de to ækvivalente) krav er opfyldt:

- For enhver følge $\mathbf{u}_k$ af elementer i A med $\lim_{k\to\infty} \mathbf{u}_k = \mathbf{u}$ gælder: $\lim_{k\to\infty} F(\mathbf{u}_k) = F(\mathbf{u})$.
- Til ethvert $\varepsilon > 0$ findes $\delta > 0$ således at: $\text{dist}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) < \delta, \mathbf{v} \in A \Rightarrow \text{dist}\,(F(\mathbf{v}), F(\mathbf{u})) < \varepsilon$.

F er kontinuert hvis F er kontinuert i alle $\mathbf{u} \in A$.

- Summer, produkter, kvotienter (hvis defineret) af kontinuerte funktioner er kontinuerte.
- Rationale funktioner af flere variable er kontinuerte.
- En funktion $F = (F_1, \ldots, F_m)$ er kontinuert hvis og kun hvis hver koordinatfunktion F_i er det.

Sammensætningen $H \circ G$ af kontinuerte funktioner H, G er kontinuert – hvis den er defineret på Gs definitionsområde.

Theorem

Givet en funktion $f : O \to \mathbf{R}^m$, $O \subseteq \mathbf{R}^n$ åben. Så gælder: f kontinuert $\Leftrightarrow$ For enhver åben delmængde $V \subset \mathbf{R}^m$ er urbilledet $f^{-1}(V) = \{\mathbf{u} \in O | f(\mathbf{u}) \in V\}$ ligeledes åben.

Konsekvenser for en kontinuert funktion $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}$:

- $\{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n | f(\mathbf{u}) < c\}$, $\{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n | f(\mathbf{u}) > c\}$ er åbne mængder.
- $\{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n | f(\mathbf{u}) \leq c\}$, $\{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n | f(\mathbf{u}) \geq c\}$, $\{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n | f(\mathbf{u}) = c\}$ er lukkede mængder.

Fortætningspunkter. Grænseværdier

Definition

- $\mathbf{x}^* \in \mathbf{R}^n$ kaldes fortætningspunkt for en mængde $A \subseteq \mathbf{R}^n$ hvis der findes en følge $\mathbf{x}_n \in A \setminus \{\mathbf{x}^*\}$ således at $\mathbf{x}^* = \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n$.
- $\mathbf{z} \in A$ kaldes et isoleret punkt i A hvis der findes $r > 0$ således at $B_r(\mathbf{z}) \cap A = \{\mathbf{z}\}$.

Et fortætningspunkt for A ligger i $\bar{A} = A \cup \mathrm{bd}(A)$ og er ikke isoleret.

Definition

Givet en delmængde $A \subseteq \mathbf{R}^n$ med fortætningspunkt $\mathbf{x}^*$, en funktion $f : A \to \mathbf{R}$ og et tal l. Så gælder: $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^*} f(\mathbf{x}) = l$ hvis $\lim_{n\to\infty} f(\mathbf{x}_n) = l$ for enhver følge $\mathbf{x}_n$ i $A \setminus \{\mathbf{x}^*\}$ med $\mathbf{x}^* = \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n$. ækvivalent: Til givet $\varepsilon > 0$ findes $\delta > 0$ sål. at: $0 < \mathrm{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) < \delta, \mathbf{x} \in A \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - l| < \varepsilon$.