Matematisk Analyse I 13. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

17.11.2009

Middelværdisætninger

Theorem

1. Givet en partiel differentiabel funktion $f : B_r(\mathbf{x}) \to \mathbf{R}$ og en vektor $\mathbf{h}$ med $\| \mathbf{h} \| < r$.
Der findes punkter $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n \in B_r(\mathbf{x})$ således at
$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \sum_1^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{z}_i)$.

Theorem

2. Givet en C^1-funktion $f : O \to \mathbf{R}$, $O \subseteq \mathbf{R}^n$ åben;
$\mathbf{x} \in O$, $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^n$ således at liniestykket mellem $\mathbf{x}$ og $\mathbf{x}+\mathbf{h}$ er indeholdt i O.
Der findes $0 < \theta < 1$ således at
$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = < \nabla f(\mathbf{x}+\theta\mathbf{h}), \mathbf{h} >$.

Korollar: C^1-funktioner er kontinuerte!

Retningsafledede og gradient

Gradienten for funktionen $f : O \to \mathbf{R}$, $O \subseteq \mathbf{R}^n$ åben, i $\mathbf{x} \in O$:
$\nabla f(\mathbf{x}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}))$.

Theorem

Givet en C^1-funktion $f : O \to \mathbf{R}$, $O \subseteq \mathbf{R}^n$ åben;
$\mathbf{x} \in O, \mathbf{p} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{p} \neq \mathbf{0}$. Så gælder:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{x}) = < \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{p} > .$$

Interpretation:

1. For en C^1-funktion fastlægger hældninger for grafkurver parallel med koordinatakserne hældninger for grafkurver langs med alle andre linier.
2. Gradientretningen $\nabla f(\mathbf{x})$ bestemmer retningen med den største numeriske hældning (retningsafledede); denne er givet ved $\| \nabla f(\mathbf{x}) \|$.

Definition

En funktion $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $g(\mathbf{u}) = c + \sum_1^n a_i u_i = c + < \mathbf{a}, \mathbf{u} >$ kaldes affin – konstant + lineær!

Affin approksimation til $f : O \to \mathbf{R}$, $O \subseteq \mathbf{R}^n$ åben, i $\mathbf{x}_0 \in O$:
$g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + < \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 >$ eller
$g(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + < \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{h} >$.

Definition

f kaldes differentiabel i $\mathbf{x}_0$ hvis

$$0 = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})}{\| \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \|} = \lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - < \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{h} >}{\| h \|}.$$

Funktionen f og dens affine approksimation har 1. ordens kontakt.

Enhver C^1-funktion er

- kontinuert og
- differentiabel.

Anvendelser af middelværdisætning (version 2).