

Matematisk Analyse I 15. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

24.11.2009

Kæderegul for vektorfunktioner af flere variable

Den bedste lineære approksimation til sammensætning af to differentiable funktioner i et punkt er sammensætningen af de bedste lineære approksimationer til hver enkel afbildning (i tilsvarende punkter).

Theorem

Givet åbne (definitions-)mængder $O \subseteq \mathbf{R}^n$, $U \subseteq \mathbf{R}^m$ og funktioner $F : O \rightarrow \mathbf{R}^m$, $G : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ således at $F(O) \subseteq U$. Desuden et punkt $\mathbf{x}_0 \in O$, således at F er differentiable i $\mathbf{x}_0$ og G er differentiable i $F(\mathbf{x}_0)$.
Konklusion: Den **sammensatte funktion** $G \circ F$ er **differentiable** i $\mathbf{x}_0$ og **Jacobi-matricerne** opfylder:

$$D(G \circ F)(\mathbf{x}_0) = DG(F(\mathbf{x}_0))DF(\mathbf{x}_0).$$

Kæderegelen for en sammensat funktion

et specielt tilfælde

$g : U \rightarrow \mathbf{R}^1$:

$$\nabla(g \circ F)(\mathbf{x}_0) = \nabla g(F(\mathbf{x}_0))DF(\mathbf{x}_0); \quad (1)$$

$$\frac{\partial(g \circ F)}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \langle \nabla g(F(\mathbf{x}_0)), \frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) \rangle \quad (2)$$

$$= \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_j}(F(\mathbf{x}_0)) \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0). \quad (3)$$

Kvadratiske former

En $n \times n$ -matrix A bestemmer en **kvadratisk form** (et homogent polynomium af grad 2)

$$Q : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}, \quad Q(\mathbf{u}) = \langle A\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \mathbf{u}^T A^T \mathbf{u}.$$

Omvendt bestemmer en kvadratisk form Q på $\mathbf{R}^n$ en **entydig bestemt symmetrisk** matrix A givet ved

$$a_{ij} = \frac{1}{4}(Q(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j) - Q(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)).$$

En kvadratisk form kaldes

positiv definit hvis $Q(\mathbf{u}) > 0$ for alle $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$

negativ definit hvis $Q(\mathbf{u}) < 0$ for alle $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$

indefinit hvis der findes $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbf{R}^n$ således at
 $Q(\mathbf{u}_1) > 0, Q(\mathbf{u}_2) < 0$.

Q er positiv definit/negativ definit/indefinit, hvis alle A s
egenværdier er positive/negative reelle tal/hvis A har både
positive og negative egenværdier (spektralsætning!)

Lokale ekstrema og kritiske punkter

Hessematrix for en 2 gange differentiabel reel funktion

Givet en funktion $f : U \rightarrow \mathbf{R}$, U åben, som er to gange differentiabel i $\mathbf{x}_0 \in U$.

Et punkt $\mathbf{x}_0 \in U$ kaldes **kritisk punkt** for f hvis $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.

Hvis f antager et lokalt ekstremum i $\mathbf{x}_0$, så er $\mathbf{x}_0$ et kritisk punkt for f .

Hesse-matricen $\nabla^2 f(\mathbf{x}_0)$ for f i $\mathbf{x}_0$ er givet ved

$$(\nabla^2 f(\mathbf{x}_0))_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}_0).$$