Matematisk Analyse I 16. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

26.11.2009

En egenskab af definite kvadratiske former

Givet en positiv definit $n \times n$-matrix A.
Så eksisterer der $c > 0$ således at
$Q(\mathbf{u}) =< A\mathbf{u}, \mathbf{u} > \geq c \parallel \mathbf{u} \parallel^2$.
Bevisvarianter:

1. Spektralsætning, alle egenværdier er positive.
2. Qs restriktion på $S^{n-1} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n | \parallel \mathbf{u} \parallel = 1\}$ antager minimum $c > 0$.

Negativ definite matricer: $Q(\mathbf{u}) \leq (-c) \parallel \mathbf{u} \parallel^2$.

Lineær og kvadratisk approksimation

Theorem

Givet en to gange partiel differentiabel funktion $f : O \to \mathbf{R}$, $O \subseteq \mathbf{R}^n$ *åben og* $\mathbf{x} \in 0$, $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^n$ *således at liniestykket mellem* $\mathbf{x}$ *og* $\mathbf{x} + \mathbf{h}$ *er indeholdt i O. Så findes der* $0 < \theta < 1$ *således at*

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + < \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{h} > + \frac{1}{2} < \nabla^2 f(\mathbf{x}) + \theta\mathbf{h})\mathbf{h}, \mathbf{h} > .$$

Theorem

Giveten C^2 *-funktion* $f : O \to \mathbf{R}$, $O \subseteq \mathbf{R}^n$ *åben og* $\mathbf{x} \in O$.
Så gælder: $0 =$

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{1}{\|\mathbf{h}\|}[f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - (f(\mathbf{x}) + < \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{h} > + \frac{1}{2} < \nabla^2 f(\mathbf{x})\mathbf{h} >, \mathbf{h} >)].$$

Hesse-matrix og extrema i kritiske punkter

Givet en C^2 -funktion $f : O \to \mathbf{R}$, $O \subseteq \mathbf{R}^n$ åben og $\mathbf{x} \in O$ et kritisk punkt for f ($\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$).
Hvis Hesse matricen $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ er

positiv definit, så antager f et lokalt minimum i $\mathbf{x}$.

negativ definit, så antager f et lokalt maximum i $\mathbf{x}$.

indefinit, så antager f ikke et lokalt extremum i $\mathbf{x}$.

Omvendt: Hvis f antager et lokalt minimum/maximum, so er Hesse-matricen $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ positiv/negativ semidefinit – egenværdier ≥ 0, hhv.≤ 0.