Matematisk Analyse I 17. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

1.12.2009

Bolzano-Weierstrass sætning for delmængder af Euklidiske rum

En karakterisering af følgekompakte mængder

Theorem

En delmængde $A \subseteq \mathbf{R}^n$ er følgekompakt hvis og kun hvis den er lukket og begrænset.

En følgekompakt delmængde $B \subseteq \mathbf{R}$ har både et maksimum og et minimum.

Extremumsværdier for reelle funktioner

Theorem

Givet $A \subseteq \mathbf{R}^n$, $F : A \to \mathbf{R}^m$ kontinuert. Så gælder:
A følgekompakt $\Rightarrow F(A)$ følgekompakt.

Corollary

En kontinuert funktion $f : A \to \mathbf{R}$ med følgekompakt definitionsområde $\emptyset \neq A \subseteq \mathbf{R}^n$ antager både maximum og minimum.

Theorem

En delmængde $\emptyset \neq A \subseteq \mathbf{R}^n$ har extremværdieegenskaben (enhver kontinuert reel funktion med definitionsområde A antager maximum og minimum) $\Leftrightarrow$ A er følgekompakt.

Definition

En afbildning $F : A \to \mathbf{R}^m,\ A \subseteq \mathbf{R}^n$ kaldes ligelig kontinuert hvis

- for to følger $\{\mathbf{u}_k\}, \{\mathbf{v}_k\}$ gælder: $\lim_{k\to\infty}\text{dist}(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\text{dist}(F(\mathbf{u}_k), F(\mathbf{v}_k)) = 0.$ $\Leftrightarrow$
- for ethvert $\varepsilon > 0$ findes $\delta > 0$ således at: $\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) < \delta \Rightarrow \text{dist}(F(\mathbf{u}), F(\mathbf{v})) < \varepsilon.$

Theorem

En kontinuert funktion $F : A \to \mathbf{R}^m$ på en følgekompakt mængde $A \subseteq \mathbf{R}^n$ er altid ligelig kontinuert.

Kurvesammenhængende mængder

Definition

En delmængde $A \subseteq \mathbf{R}^n$ kaldes kurvesammenhængende hvis der for hvert par $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in A$ findes en kontinuert kurve $\gamma : [a, b] \to A$ som forbinder $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$: $\gamma(a) = \mathbf{u}, \gamma(b) = \mathbf{v}$.

Theorem

For en kontinuert funktion $F : A \to \mathbf{R}^m$, $A \subseteq \mathbf{R}^n$, gælder:
A kurvesammenhængende $\Rightarrow$ $F(A)$ kurvesammenhængende.

Corollary

For en kontinuert funktion $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subseteq \mathbf{R}^n$, gælder:
A kurvesammenhængende $\Rightarrow$ $f(A) \subset \mathbf{R}$ er et interval.

Konklusion $\Leftrightarrow$ A har mellemværdiegenskab.