Matematisk Analyse I 19. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

8.12.2009

Definition

En følge $\{p_k\}$ i et metrisk X kaldes Cauchy-følge hvis:
For ethvert $\varepsilon > 0$ findes $N \in \mathbf{N}$ således at:
$k, l \geq N \Rightarrow d(p_k, p_l) < \varepsilon$.

Theorem

En konvergent følge er en Cauchy-følge.

Definition

Et metrisk rum X kaldes fuldstændig hvis enhver Cauchyfølge i X konvergerer (i X).

Theorem

- $\mathbf{R}^n$ *er fuldstændig.*
- *Lukkede delmængder af fuldstændige metriske rum er selv fuldstændige*

Kontraktioner, fixpunkter

Definition

- En afbildning $T : X \to Y$ mellem metriske rum kaldes Lipschitz hvis der findes en (Lipschitz) konstant $c > 0$ således at:
  $p, q \in X \Rightarrow d_Y(T(p), T(q)) \leq c d_X(p, q)$.
- En Lipschitz afbildning med Lipschitz konstant $0 < c < 1$ kaldes en kontraktion.

Definition

Givet en afbildning $T : X \to X$ fra et metrisk rum ind i sig selv.
Et punkt $x \in X$ kaldes fixpunkt for T hvis $T(x) = x$.

Theorem

Givet et fuldstændigt metrisk rum X.
En kontraktion $T : X \to X$ har netop ét fixpunkt x.
For et hvilket som helst $x_0 \in X$ gælder: $\lim_{k\to\infty} T^k(x_0) = x$.

Bevis.

1. Entydighed:
   $d(x, y) = d(T(x), T(y)) \leq cd(x, y) \Rightarrow d(x, y) = 0.$
2. Følgen $x_k = T^k(x_0)$ er en Cauchyfølge
   $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_k = x \in X$ eksisterer.
3. x er fixpunkt: $T(x) = \lim_{k\to\infty} T(x_k) = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = x$.

$\square$