Den sidste lektion skal give jer lejlighed til at afprøve jeres færdigheder på et afprøvet eksamenssæt – det fra sidste år. Jeg har kun modificeret teksten en lille smule i opgave 4.

Efter prøven vil I kunne finde et sæt med korte besvarelser og dermed sammenligne med hvad I selv fandt ud af.

Opgaver

Opgave 1. Denne opgave omhandler uendelige rækker.

1. Afgør, om rækken
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{2n^2 + \sin(n)}$$
er konvergent eller divergent.
2. Afgør, om rækken
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{1 + e^{-n}}$$
er konvergent eller divergent.
3. Bestem konvergensradius for potensrækken
$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n} x^n.$$
Gør rede for, at for $x = -\frac{1}{8}$ er summen af denne potensrække lig $\frac{2}{3}$.

Opgave 2. Der er givet en funktion $F : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ ved
$$F(u, v, x, y) = (xy + uv, xu + yv).$$
Der er også givet et punkt
$$(u_0, v_0, x_0, y_0) = (1, 1, 1, -1) \in \mathbf{R}^4.$$

1. Vis, at $F(u_0, v_0, x_0, y_0) = (0, 0)$.
2. Vis, at der findes en åben mængde $W \subseteq \mathbf{R}^2$ med $(x_0, y_0) \in W$ og en kontinuert differentiabel funktion $g : W \to \mathbf{R}^2$, således at $g(x_0, y_0) = (u_0, v_0)$, og således at $F(g(x, y), x, y) = (0, 0)$ for alle $(x, y) \in W$.
3. Vi skriver $g(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$. Find de fire partielle afledede
$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(1, -1), \frac{\partial g_1}{\partial y}(1, -1), \frac{\partial g_2}{\partial x}(1, -1), \frac{\partial g_2}{\partial y}(1, -1).$$

Opgave 3. Vis, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^4+16)} dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

ved hjælp af residueregning.

Opgave 4. Der er givet en kompleks funktion ved

$$h(z) = \frac{1}{z^2 + (1-2i)z - 2i}.$$

1. Vis, at $h(z)$ er en meromorf funktion med simple poler i $z = -1$ og $z = 2i$.
2. Bestem residuet i de to poler.
3. Hvad er konvergensradius for potensrækkeudviklingen af $h(z)$ med udviklingspunkt $z_0 = 2$?
4. Bestem potensrækkeudviklingen af $h(z)$ med udviklingspunkt $z_0 = 2$.
   Vink: Man kan starte med at eftervise, at der gælder:

   $$h(z) = (\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i)(\frac{1}{z-2i} - \frac{1}{z+1})$$

   og efterfølgende transformere dette udtryk ved hjælp af geometriske rækker i hvilke $z - 2$ indgår.

RAUSSEN@MATH.AAU.DK 9940 8855 FREDRIK BAJERSVEJ 7G
WWW.MATH.AAU.DK/~RAUSSEN - 9220 AALBORG ØST