Opgaver og Løsninger

Opgave 1. Denne opgave omhandler uendelige rækker.

1. Afgør, om rækken
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{2n^2+\sin(n)}$$
er konvergent eller divergent.
2. Afgør, om rækken
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{1+e^{-n}}$$
er konvergent eller divergent.
3. Bestem konvergensradius for potensrækken
$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n}x^n.$$
Gør rede for, at for $x = -\frac{1}{8}$ er summen af denne potensrække lig $\frac{2}{3}$.

Løsningsskitse.

1. Idet $-1 \leq \cos(n), \sin(n) \leq 1$ for alle $n \in \mathbf{N}$ gælder der for alle $n \in \mathbf{N}$:
$$\mid \frac{\cos(n)}{2n^2+\sin(n)} \mid \leq \frac{1}{2n^2-1} \leq \frac{1}{n^2}.$$
Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergerer (en p-række, Fitzpatrick, Corollary 9.13). På grund af sammenligningskriteriet (Fitzpatrick, Corollary 9.8) konvergerer rækken
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{2n^2+\sin(n)}$$
absolut, og dermed konvergerer den (Fitzpatrick, Corollary 9.18).
2. Idet $e^{-n} > 0$ for alle $n \in \mathbf{N}$, gælder der:
$$0 < \frac{e^{-n}}{1+e^{-n}} < e^{-n} = (\frac{1}{e})^n.$$
Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{e})^n$ er en konvergent geometrisk række idet $0 < \frac{1}{e} < 1$ (Fitzpatrick, Proposition 9.6). På grund af sammenligningskriteriet konvergerer rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{1+e^{-n}}$ ligeledes.
3. Vi anvender brøkkriteriet (Fitzpatrick, Corollary 9.21) og får:
$$\frac{2^{2n+2} \mid x^{n+1} \mid}{2^n \mid x^n \mid} = 4 \mid x \mid .$$

Rækken konvergerer derfor (absolut) for $4 \mid x \mid < 1$ og divergerer for $4 \mid x \mid > 1$. Dermed har rækken konvergensradius $\frac{1}{4}$. For $x = -\frac{1}{8}$ fås den geometriske række (Fitzpatrick, Proposition 9.6)

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n}(\frac{-1}{8})^n = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-1}{2})^n = \frac{1}{1-\frac{-1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Opgave 2. Der er givet en funktion $F : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ ved

$$F(u,v,x,y) = (xy + uv, xu + yv).$$

Der er også givet et punkt

$$(u_0, v_0, x_0, y_0) = (1,1,1,-1) \in \mathbf{R}^4.$$

1. Vis, at $F(u_0, v_0, x_0, y_0) = (0,0)$.
2. Vis, at der findes en åben mængde $W \subseteq \mathbf{R}^2$ med $(x_0, y_0) \in W$ og en kontinuert differentiabel funktion $g : W \to \mathbf{R}^2$, således at $g(x_0, y_0) = (u_0, v_0)$, og således at $F(g(x,y), x, y) = (0,0)$ for alle $(x,y) \in W$.
3. Vi skriver $g(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y))$. Find de fire partielle afledede

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(1,-1), \frac{\partial g_1}{\partial y}(1,-1), \frac{\partial g_2}{\partial x}(1,-1), \frac{\partial g_2}{\partial y}(1,-1).$$

Løsningsskitse. 1. $F(1,1,1,-1) = (-1+1, 1-1) = (0,0)$.

2. Vi anvender implicit funktionssætning (Fitzpatrick, Theorem 17.6) og tester først forudsætningerne. Afbildningen F er givet ved polynomier (i fire variable) og dermed C^∞. Nu beregnes matricen

$$\mathbf{D}_{(u,v)}\mathbf{F}(1,1,1,-1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(1,1,1,-1) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(1,1,1,-1) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(1,1,1,-1) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(1,1,1,-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

med determinant $-2 \neq 0$. Derfor har matricen $\mathbf{D}_{(u,v)}\mathbf{F}(1,1,1,-1)$ en invers matrix og sætningen kan anvendes. Specielt gælder:

$$\mathbf{D}g(1,-1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(1,-1) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(1,-1) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(1,-1) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(1,-1) \end{bmatrix}$$

$$= -(\mathbf{D}_{(u,v)}\mathbf{F}(1,1,1,-1))^{-1}\mathbf{D}_{(x,y)}\mathbf{F}(1,1,1,-1) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Opgave 3. Vis, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^4+16)} dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

ved hjælp af residueregning.

Løsningsskitse. Idet $x^4+16 = (x^2-4i)(x^2+4i) = \prod_{k=0}^{3}(x-2\omega_8^{2k+1})$ hvor $\omega_8 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ er en primitiv 8ende enhedsrod ($\omega_8^8 = 1$) har integranden fire simple poler i $2\omega_8^{2k+1}, 0 \leq k \leq 3$ (ingen af dem på den reelle akse!)
Da $2+2 = \deg x^2 \leq \deg x^4+16 = 4$, kan vi anvende Jensen, Proposition 8.2 og skal beregne integrandens residuer i ω_8 og i ω_8^3 i den øvre halvplan. Disse beregnes ifølge opskrift 2. i Jensen, s. 30:

$$\begin{aligned} Res(f, 2\omega_8) &= \frac{4\omega_8^2}{4*8\omega_8^3} = \frac{\omega_8^7}{8} = \frac{\sqrt{2}}{16}(1-i) \\ Res(f, 2\omega_8^3) &= \frac{4\omega_8^6}{4*8\omega_8^1} = \frac{\omega_8^5}{8} = \frac{\sqrt{2}}{16}(-1-i). \end{aligned}$$

Vi konkluderer med Proposition 8.2:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^4+16)}dx = 2\pi i\frac{\sqrt{2}}{16}(1-i-1-i) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

Opgave 4. Der er givet en kompleks funktion ved

$$h(z) = \frac{1}{z^2+(1-2i)z-2i}.$$

1. Vis, at $h(z)$ er en meromorf funktion med simple poler i $z=-1$ og $z=2i$.
2. Bestem residuet i de to poler.
3. Hvad er konvergensradius for potensrækkeudviklingen af $h(z)$ med udviklingspunkt $z_0 = 2$?
4. Bestem potensrækkeudviklingen af $h(z)$ med udviklingspunkt $z_0 = 2$.
Vink: Man kan starte med at eftervise, at der gælder:

$$h(z) = (\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i)(\frac{1}{z-2i}-\frac{1}{z+1})$$

og efterfølgende transformere dette udtryk ved hjælp af geometriske rækker i hvilke $z-2$ indgår.

Løsningsskitse.
1. Nævneren faktoriseres: $z^2+(1-2i)z-2i = (z+1)(z-2i)$. Da tælleren har grad 0 og nævneren har simple rødder, er -1 og $2i$ de eneste singulariteter, og de er simple poler.
2. Ved at bruge opskrift 2. i Jensen, s. 30 fås:

$$\begin{aligned} Res(h,-1) &= \frac{1}{2*(-1)+1-2i} = \frac{-1+2i}{5} \\ Res(h,2i) &= \frac{1}{2*2i+1-2i} = \frac{1-2i}{5}. \end{aligned}$$

3. Vi benytter Jensen, Theorem 5.1 og bestemmer radius r for den største åbne cirkel om $z_0 = 2$, i hvilken funktionen h er holomorf. Denne cirkel har netop en af polerne -1 og $2i$ på randen og den anden udenfor. Idet $\parallel 2-(-1) \parallel = 3$ og $\parallel 2-2i \parallel = 2\sqrt{2} < 3$ er konvergensradius $r = 2\sqrt{2}$.
4. Vi finder en partialbrøkdekomposition for h på formen

$$h(z) = \frac{1}{z^2+(1-2i)z-2i} = \frac{A}{z-2i} + \frac{B}{z+1} = \frac{(A+B)z+(A-2iB)}{z^2+(1-2i)z-2i}.$$

A, B skal tilfredsstille det lineære ligningssystem $A+B=0, A-2iB=1$ med løsning $A = \frac{1-2i}{5}, B = -A$ og derfor

$$h(z) = \frac{1-2i}{5}(\frac{1}{z-2i} - \frac{1}{z+1}).$$

Nu gælder:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-2i} &= \frac{1}{2-2i+z-2} = \frac{1}{2-2i}\frac{1}{1-\frac{z-2}{-2+2i}} = \frac{1}{2-2i}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z-2}{-2+2i})^n, \mid z-2 \mid < 2\sqrt{2}; \\
\frac{1}{z+1} &= \frac{1}{3+z-2} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z-2}{-3}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z-2}{-3})^n, \mid z-2 \mid < 3.
\end{aligned}$$

Sammenfattende fås for $\mid z-2 \mid < 2\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned}
h(z) &= \frac{1-2i}{5}\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{(2-2i)^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}](z-2)^n \\
&= \frac{1-2i}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[\frac{(1+i)^{n+1}}{4^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}](z-2)^n \\
&= \frac{1-2i}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[\frac{(3+3i)^{n+1}-4^{n+1}}{12^{n+1}}](z-2)^n \\
&= \frac{1-2i}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[\frac{(3\sqrt{2}\omega_8)^{n+1}-4^{n+1}}{12^{n+1}}](z-2)^n.
\end{aligned}$$