Matematisk Analyse II 7. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

24.2.2010

Kompleks differentiabilitet. Holomorfe funktioner

Definition

- En funktion $f : G \longrightarrow \mathbf{C}$ på en åben delmængde $G \subseteq \mathbf{C}$ kaldes kompleks differentiabel i $z_0 \in G$ hvis
$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$
eksisterer.
- Funktionen kaldes holomorf i G hvis den er kompleks differentiabel i alle punkter $z_0 \in G$.

Definition

Givet en åben delmængde $G \subseteq \mathbf{C}$ og en funktion $f = u + iv : G \to \mathbf{C}$ med realdel og imaginærdel $u, v : G \to \mathbf{R}$. u, v opfylder Cauchy-Riemann differentialligningerne i $z_0 = x_0 + iy_0$ hvis de er reel partielt differentiable i (x_0, y_0) og hvis deres partielle afledede opfylder

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0); \qquad v_x(x_0, y_0) = -u_y(x_0, y_0).$$

Theorem

$f = u + iv : G \to \mathbf{C}$ er kompleks differentiabel i $z_0 \in G$ hvis og kun hvis u, v er reel differentiable i z_0[a] og hvis u, v opfylder Cauchy-Riemann differentialligningerne.

[a] specielt hvis u, v begge er C^1 i G

Definition

En funktion $f : G \subseteq \mathbf{C}$ kaldes analytisk i G hvis der for ethvert $z_0 \in G$ findes en potensrække med $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ på en cirkelskive $B(z_0, r) \subseteq G$ med radius $r > 0$.

Theorem

- *En potensrække $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ og dens formelt afledede potensrække $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}$ har samme konvergensradius r.*
- *Inden for konvergenscirklen $B(z_0, r)$ gælder: f er (uendelig mange gange) kompleks differentiabel (dvs. holomorf) og $f'(z) = g(z)$.*
- $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)$.