Matematisk Analyse II 13. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

7.4.2010

Kurveintegraler og stamfunktioner

Definition

En åben og sammenhængende delmængde $G \subseteq \mathbf{C}$ kaldes et **område**.[a]
Områder er endda polygon-sammenhængende.

[a] domain

Givet en kontinuert funktion $f : G \to \mathbf{C}$.

Theorem

1. *Hvis f har en stamfunktion[a] $F : G \to \mathbf{C}$, så gælder langs med enhver kurve $\gamma : [a, b] \to G$:*
   $\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.
   Specielt: $\oint_\gamma f(z)dz = 0$ *langs med en lukket kurve γ i G.*
2. *Hvis* $\oint_\gamma f(z)dz = 0$ *langs med enhver lukket polygonkurve γ i G, så har f en stamfunktion $F : G \to \mathbf{C}$.*

[a] primitive

Cauchys integralsætning

Definition

Et område $\emptyset \neq G \subseteq \mathbf{C}$ kaldes stjerneformet hvis der findes et $z_0 \in G$ således at liniestykket $L(z_0; z) \subseteq G$ (det som forbinder z_0 og z).

Theorem (Cauchys integralsætning)

Lad $f : G \to \mathbf{C}$ være en holomorf funktion på et stjerneformet definitionsområde G.
Så er integralet langs med enhver lukket polygonkurve γ i G $\oint_\gamma f(z)dz = 0$.

Bevis.

Det indre af γ skæres op i trekanter. Goursats lemma (det eneste alvorlige “regnestykke” inden for elementær kompleks funktionsteori) anvendes på hver trekant. $\square$