Matematisk Analyse II 17. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

21.4.2010

Cauchys residuesætning

Theorem (Cauchys residuesætning)

Givet

1. *et stjerneformet område $G \subseteq \mathbf{C}$,*
2. *en stykkevis glat lukket kurve γ i G og*
3. *en funktion f som er meromorf i G med poler i den diskrete mængde $P \subset G$, $P \cap \gamma^* = \emptyset$.*

Så gælder:

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{a_k \in P} ind_\gamma(a_k) Res(f, a_k).$$

Summen på højre side har kun endelig mange led $\neq 0$.

Givet en meromorf funktion på formen $h = \frac{f}{g}$ med pol i a af orden $o(a)$.

$o(a) = 1$: $Res(h,a) = \lim_{z \to a}(z-a)h(z)$; specielt:
$g(a) = 0, f(a) \neq 0 \neq g'(a)$: $Res(h,a) = \frac{f(a)}{g'(a)}$.

$o(a) = m \geq 1$: $H(z) = (z-a)^m h(z)$ med hævelig singularitet i a. $Res(h,a) = \frac{H^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$.

Antal rødder - antal poler

Theorem

Givet

1. *en meromorf funktion h på et stjerneformet område G med rødder i Z og poler i P;*
2. *en* ***simpel*** *positivt orienteret lukket kurve i G, således at $\gamma^* \cap (Z \cup P) \neq \emptyset$.*

$N_\gamma(Z)$ og $N_\gamma(P)$ angiver antallet af rødder, hhv. poler i det ***indre af γ vægtet*** *med deres* ***orden****.*
Så gælder:

$$N_\gamma(Z) - N_\gamma(P) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)} dz.$$