Matematisk Analyse II 18. lektion

Martin Raussen

Department of Mathematical Sciences
Aalborg University
Denmark

23.4.2010

Theorem

Givet en rational funktion $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, p, q \in \mathbf{C}[X]$ *med* $\deg p < \deg q + 1$ *og uden poler på* $\mathbf{R}$. *Så gælder:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum Res(f, z_j) = -2\pi i \sum Res(f, w_j),$$

med $P_+ := \{z_1, \dots, z_k\} = P(f) \cap \mathbf{C}_+$ *og* $P_- := \{w_1, \dots, w_l\} = P(f) \cap \mathbf{C}_-$ *mængden af poler i den øvre, hhv. den nedre komplekse halvplan.*

Ide.

Integral over lukket kurve som består af sti langs med interval $[-R, R]$ og halvcirkel med radius R om Origo i den øvre, hhv. den nedre halvplan.

$\lim_{R\to\infty}$: Integral over halvcirkel går mod 0. □

Theorem

Givet en funktion f som er meromorf på $\mathbf{C}$ med

1. *endelig mange poler $P_+ := \{z_1, \dots, z_k\}$ i den øvre halvplan*
2. *uden poler på $\mathbf{R}$*
3. $\lim_{R\to\infty} \max_{0\le t\le\pi} |f(Re^{it})| = 0$;
   fx. $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, p, q \in \mathbf{R}[X], \deg p < \deg q$.

Så gælder:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx = 2\pi i \sum_j Res(f(z)e^{i\lambda z}, z_j).$$

Theorem

Givet en funktion som er

1. *meromorf i $B(0,R)$, $R > 1$,*
2. *uden poler på $\partial B(0,1)$ og*
3. *med poler $P \cap B(0,1) := \{z_1, \dots, z_k\}$ inden for enhedscirklen.*

Så gælder:

$$\int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t) = 2\pi \sum_j Res\Big(\frac{1}{z} f\Big(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\Big), z_j\Big).$$