Elementær sandsynlighedsregning

Sandsynlighedsbegrebet

Et udfaldsrum S er mængden af alle de mulige udfald af et eksperiment.

En hændelse A er en delmængde af udfaldsrummet S.

Et sandsynlighedsmål er en funktion P, der afbilder hændelser ind i intervallet $[0;1]$. Funktionen P skal opfylde

$$\begin{gathered} P(S) = 1 \\ 0 \leq P(A) \leq 1 \\ A \cap B = \varnothing \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) \end{gathered}$$

Der gælder blandt andet

$$\begin{gathered} P(\varnothing) = 0 \\ P(A^c) = 1 - P(A) \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{gathered}$$

Betinget sandsynlighed:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

A og B er uafhængige, hvis

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B) \text{ for alle } A, B$$

Uafhængighed medfører, at

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{og} \quad P(B|A) = P(B)$$

Lad $E_1, E_2, \ldots, E_k$ være en klassedeling af S, dvs. $E_1, E_2, \ldots, E_k$ opfylder

$$\begin{gathered} E_i \cap E_j = \varnothing \text{ for alle } i \neq j \\ E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k = S \quad {}^{*} \end{gathered}$$

Loven om total sandsynlighed:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A|E_i)\,P(E_i) \quad {}^{**}$$

[*] Definitionen kan udvides til at gælde tælleligt mange hændelser, dvs. $E_1 \cup E_2 \cup \cdots = S$.

Bayes' formel:

$$P(E_j|A) = \frac{P(A|E_j)\,P(E_j)}{P(A)} = \frac{P(A|E_j)\,P(E_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(A|E_i)\,P(E_i)}, \quad j = 1, \ldots, k \quad ^{**}$$

Symmetrisk sandsynlighed: Når alle udfald i S har samme sandsynlighed, kan sandsynligheden for en hændelse A udregnes ved at tælle, hvor mange udfald der hører til A, og dividere med antallet af udfald i S. Altså

$$P(A) = \frac{\#\ \text{gunstige}}{\#\ \text{mulige}}$$

Stokastisk variabel

En stokastisk variabel X er en reel funktion defineret på udfaldsrummet S, dvs. $X : S \to \mathbb{R}$, $X(s) = x,\ s \in S$

X er diskret, når X antager endeligt mange værdier eller højst tælleligt mange værdier.

X er kontinuert, når X antager flere end tælleligt mange værdier.

Diskrete fordelinger

Sandsynlighedsfunktion for en diskret stokastisk variabel:

$$p(x_k) = P(X = x_k)$$

Når X er heltallig, dvs. når X kun antager hele tal som værdier, kan sandsynlighedsfunktionen skrives

$$p(k) = P(X = k)$$

Fordelingsfunktion:

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_k \le x} p(x_k), \quad x \in \mathbb{R}$$

Middelværdi af X:

$$\mathrm{E}[X] = \sum_k x_k\, p(x_k) = \mu$$

Middelværdi af en afledt stokastisk variabel $g(X)$:

$$\mathrm{E}[g(X)] = \sum_k g(x_k)\, p(x_k)$$

Varians af X:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^2] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2 = \sigma^2$$

Spredning:

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

** Formlerne modificeres, når S består af tælleligt mange hændelser.

Eksempel 1. Kast med en terning. Lad X betegne antal øjne.

$$p(k) = \frac{1}{6}, \quad k = 1, 2, \ldots, 6$$
$$\mathrm{E}[X] = \sum_{k=1}^{6} k\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\frac{6(6+1)}{2} = \frac{7}{2} \quad *$$
$$\mathrm{E}[X^2] = \sum_{k=1}^{6} k^2\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6} = \frac{91}{6} \quad *$$
$$\mathrm{Var}(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{182-147}{12} = \frac{35}{12}$$

Lad Y betegne antal kast, der medgår, indtil en sekser fremkommer.

$$p(k) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$
$$\mathrm{E}[Y] = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6}\frac{1}{(1-\frac{5}{6})^2} = 6 \quad **$$
$$\mathrm{E}[(Y+1)Y] = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)k\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6}\frac{2}{(1-\frac{5}{6})^3} = 72 \quad **$$
$$\mathrm{E}[Y^2] = E[(Y+1)Y] - \mathrm{E}[Y] = 72 - 6 = 66$$
$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}[Y^2] - (\mathrm{E}[Y])^2 = 66 - 6^2 = 30$$

□

Indikatorvariabel. Lad I_A betegne indikatorvariabel for hændelsen A, dvs. I_A antager værdien 1, når A forekommer, og værdien 0, når A^c forekommer. Sæt $P(A) = p$.

$$\mathrm{E}[I_A] = p, \qquad \mathrm{Var}(I_A) = p(1-p)$$

Binomialfordelingen. Lad X være antal gange en hændelse A forekommer blandt n uafhængige gentagelser af et forsøg. Sæt $P(A) = p$. Bemærk, at X kan opfattes som en sum af indikatorvariable for hændelsen A, dvs. $X = I_{A_1} + I_{A_2} + \ldots + I_{A_n}$.

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$
$$\mathrm{E}[X] = np, \qquad \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$

At X er binomialfordelt med antalsparameter n og sandsynlighedsparameter p, skrives kort $X \sim b(n, p)$.

Poissonfordelingen. Lad λ være det gennemsnitlige antal begivenheder, der indtræffer i et område (interval), og lad X være det antal begivenheder, der indtræffer.

$$p(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$
$$\mathrm{E}[X] = \lambda, \qquad \mathrm{Var}(X) = \lambda$$

At X er Poissonfordelt med parameter λ, skrives kort $X \sim p(\lambda)$.

---

*Vedr. summationer, se baggrundsnote til sandsynlighedsregning side 3

**Vedr. summationer, se baggrundsnote til sandsynlighedsregning side 4

Kontinuerte fordelinger

Fordelingsfunktion:

$$F(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Bemærk, at der gælder

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$$

Hvis der findes en stykkevis kontinuert funktion f, der opfylder

$$f(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}$$
$$\int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = F(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

så kaldes f tæthedsfunktion for X. Der gælder blandt andet

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$
$$P(X = x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$
$$P(a < X \leq x) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Middelværdi af X:

$$\mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx = \mu$$

Middelværdi af en afledt stokastisk variabel $g(X)$:

$$\mathrm{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,f(x)\,dx$$

Varians af X:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^2] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2 = \sigma^2$$

Spredning:

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

Eksempel 2. Lad X være en stokastisk variabel med tæthedsfunktion $f(x) = 3x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

$$\mathrm{E}[X] = \int_0^1 x\,3x^2\,dx = 3\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{4}$$
$$\mathrm{E}[X^2] = \int_0^1 x^2\,3x^2\,dx = 3\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{5}$$
$$\mathrm{Var}(X) = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{48-45}{80} = \frac{3}{80} = 0.0375$$

Lad $Y = \sqrt{X}$ være en afledt stokastisk variabel.

$$\mathrm{E}[Y] = \int_0^1 \sqrt{x}\,3x^2\,dx = 3\left[\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\right]_0^1 = \frac{6}{7}$$
$$\mathrm{E}[Y^2] = \int_0^1 (\sqrt{x})^2\,3x^2\,dx = \frac{3}{4}$$
$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{3}{4} - \left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{147-144}{196} = \frac{3}{196} \approx 0.0153 \qquad \square$$

Ligefordeling på interval. $X \sim U[a;b]$.

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a < x < b$$
$$\mathrm{E}[X] = \frac{a+b}{2}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{b^2-a^2}{12}$$

Eksponentialfordelingen. $X \sim e(\lambda)$.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$
$$\mathrm{E}[X] = \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Normalfordelingen. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$
$$\mathrm{E}[X] = \mu, \qquad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

Todimensional stokastisk variabel

Diskrete fordelinger

Den simultane sandsynlighedsfunktion for en todimensional diskret variabel (X, Y):

$$p(x_j, y_k) = P(X = x_j, Y = y_k) = P(X = x_j \cap Y = y_k)$$

Marginal sandsynlighedsfunktion

$$\text{for } X: \qquad p_X(x_j) = P(X = x_j) = \sum_k p(x_j, y_k)$$
$$\text{for } Y: \qquad p_Y(y_k) = P(Y = y_k) = \sum_j p(x_j, y_k)$$

Middelværdi af en afledt endimensional stokastisk variable $g(X, Y)$:

$$\mathrm{E}[g(X, Y)] = \sum_j \sum_k g(x_j, y_k)\, p(x_j, y_k)$$

X og Y er uafhængige, hvis $p(x_j, y_k) = p_X(x_j)\, p_Y(y_k)$ for alle j og k.

Eksempel 3. Kast med to terninger. Lad X betegne det største antal øjne, der fremkommer, og lad Y betegne summen af antal øjne. Bemærk, af X kan antage værdierne $1, 2, \ldots, 6$, og at Y kan antage værdierne $2, 3, \ldots, 11, 12$. Vi udregner værdierne af den simultane sandsynlighedsfunktion:

$P(X = x, Y = y)$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$\frac{1}{36}$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
2	–	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	–	–	–	–	–	–	–	–
3	–	–	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	–	–	–	–	–	–
4	–	–	–	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	–	–	–	–
5	–	–	–	–	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	–	–
6	–	–	–	–	–	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Marginalfordelingen

for X:

x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

for Y:

y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(Y=y)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Bemærk, at marginalfordelingerne fremkommer ved simpel addition af henholdsvis rækker og søjler i skemaet for den simultane sandsynlighedsfunktion.

Udregning af middelværdi og varians af henholdsvis X og Y:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= 1\frac{1}{36} + 2\frac{3}{36} + 3\frac{5}{36} + 4\frac{7}{36} + 5\frac{9}{36} + 6\frac{11}{36} = \frac{161}{36} \\
\mathrm{E}[X^2] &= 1\frac{1}{36} + 4\frac{3}{36} + 9\frac{5}{36} + 16\frac{7}{36} + 25\frac{9}{36} + 36\frac{11}{36} = \frac{791}{36} \\
\mathrm{Var}(X) &= \frac{791}{36} - \left(\frac{161}{36}\right)^2 = \frac{28476-25921}{1296} = \frac{2555}{1296} \approx 1.9715
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[Y] &= 2\frac{1}{36} + 3\frac{2}{36} + \cdots + 11\frac{2}{36} + 12\frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7 \\
\mathrm{E}[Y^2] &= 4\frac{1}{36} + 9\frac{2}{36} + \cdots + 121\frac{2}{36} + 144\frac{1}{36} = \frac{1974}{36} = \frac{329}{6} \\
\mathrm{Var}(Y) &= \frac{247}{6} - 7^2 = \frac{1974-1764}{36} = \frac{210}{36} = \frac{35}{6} \approx 5.8333
\end{aligned}$$

□

Kontinuerte fordelinger

Den simultane fordelingsfunktion for den todimensionale kontinuerte variabel (X, Y):

$$F(x,y) = P(X \le x,\ Y \le y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Hvis der findes en stykkevis kontinuert funktion af to reelle variable, som opfylder

$$\begin{gathered}
f(x,y) \ge 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\
\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv = F(x,y)
\end{gathered}$$

så kaldes $f(x,y)$ den simultane tæthedsfunktion for (X,Y).

Marginale tætheder:

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \\
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx
\end{aligned}$$

X og Y er uafhængige, hvis tæthedsfunktionerne opfylder $f(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y)$.

Middelværdi af en afledt endimensional stokastisk variabel $g(X,Y)$:

$$\mathrm{E}[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\,f(x,y)\,dx\,dy$$

Eksempel 4. Lad den simultane tæthedsfunktion for (X, Y) være givet som

$$f(x, y) = 12x^2, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1 - x$$

De marginale tætheder bliver

$$f_X(x) = \int_0^{1-x} 12x^2 dy = 12x^2(1-x) = 12(x^2 - x^3), \quad 0 \le x \le 1$$
$$f_Y(y) = \int_0^{1-y} 12x^2 dx = 12\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_0^{1-y} = 4(1 - 3y + 3y^2 - y^3), \quad 0 \le y \le 1$$

Bemærk, at X og Y er afhængige.

Udregning af middelværdi og varians af henholdsvis X og Y:

$$E[X] = \int_0^1 x\, 12(x^2 - x^3) dx = 12\Big[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\Big]_0^1 = 12\Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\Big) = \frac{3}{5}$$
$$E[X^2] = \int_0^1 x^2 12(x^2 - x^3) dx = 12\Big[\frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6}\Big]_0^1 = 12\Big(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\Big) = \frac{2}{5}$$
$$\mathrm{Var}(X) = \frac{2}{5} - \Big(\frac{3}{5}\Big)^2 = \frac{10-9}{25} = \frac{1}{25}$$

$$E[Y] = \int_0^1 y\, 4(1 - 3y + 3y^2 - y^3) dy = 4\Big[\frac{y^2}{2} - 3\frac{y^3}{3} + 3\frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5}\Big]_0^1$$
$$= 4\Big(\frac{1}{2} - 3\frac{1}{3} + 3\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\Big) = 4 \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{5}$$
$$E[Y^2] = \int_0^1 y^2 4(1 - 3y + 3y^2 - y^3) dy = 4\Big[\frac{y^3}{3} - 3\frac{y^4}{4} + 3\frac{y^5}{5} - \frac{y^6}{6}\Big]_0^1$$
$$= 4\Big(\frac{1}{3} - 3\frac{1}{4} + 3\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\Big) = \frac{1}{15}$$
$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{15} - \Big(\frac{1}{5}\Big)^2 = \frac{5-3}{75} = \frac{2}{75}$$

□

Kovarians og korrelation

Kovariansen mellem to stokastiske variable X og Y er givet ved

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]\,E[Y] = \sigma_{XY}$$

Bemærk, at

$$X, Y \text{ uafhængige} \quad \Rightarrow \quad E[XY] = E[X]\,E[Y] \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Cov}(X, Y) = 0$$

Når $\mathrm{Cov}(X, Y) > 0$, så siges X og Y at være positivt korrelerede, og når $\mathrm{Cov}(X, Y) < 0$, så siges X og Y at være negativt korrelerede.

Korrelationskoefficienten, eller blot korrelationen, er en dimensionsløs udgave af kovariansen:

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Egenskaber ved korrelation:

$$-1 \le \rho(X, Y) \le 1$$
$$\rho(X, Y) = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \exists\, \alpha, \beta:\ Y = \alpha + \beta X$$

Eksempel 3 fortsat. Udregning af kovarians og korrelation:

$$\mathrm{E}[XY] = 1\cdot 2\cdot \frac{1}{36} + 2\cdot 3\cdot \frac{2}{36} + 2\cdot 4\cdot \frac{3}{36} + \cdots + 6\cdot 11\cdot \frac{2}{36} + 6\cdot 12\cdot \frac{1}{36} = \frac{1232}{36} = \frac{308}{9}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{308}{9} - \frac{161}{36}\cdot 7 = \frac{1232-1127}{36} = \frac{105}{36} = \frac{35}{12} \approx 2.9167$$

$$\rho(X,Y) = \frac{\frac{35}{12}}{\sqrt{\frac{2555}{1296}}\sqrt{\frac{35}{6}}} = \frac{630}{\sqrt{2555}\sqrt{210}} \approx 0.8601 \qquad \square$$

Eksempel 4 fortsat. Udregning af kovarians og korrelation:

$$\mathrm{E}[XY] = \int_0^1 \int_0^{1-x} xy\, 12x^2 dy dx = \int_0^1 12x^3 \Big[\frac{y^2}{2}\Big]_0^{1-x} dx = 6\int_0^1 x^3(1-2x+x^2)dx$$

$$= 6\int_0^1 x^3 - 2x^4 + x^5 dx = 6\Big[\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6}\Big]_0^1 = 6\Big(\frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6}\Big) = 6\frac{15-24+10}{60} = \frac{1}{10}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{10} - \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{5-6}{50} = -\frac{1}{50}$$

$$\rho(X,Y) = \frac{-\frac{1}{50}}{\sqrt{\frac{1}{25}}\sqrt{\frac{2}{75}}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{4} \approx -0.6124 \qquad \square$$

Regneregler

Regneregler for middelværdi

- $P(X=c)=1 \Rightarrow \mathrm{E}[X]=c$
- $\mathrm{E}[aX+bY] = a\,\mathrm{E}[X] + b\,\mathrm{E}[Y]$
- $\mathrm{E}[\sum_{i=1}^n a_i X_i] = \sum_{i=1}^n a_i\, \mathrm{E}[X_i]$
- $X_1 \le X_2 \Rightarrow \mathrm{E}[X_1] \le \mathrm{E}[X_2]$.
- $|\mathrm{E}[X]| \le \mathrm{E}[|X|]$.

Regneregler for varians

- $P(X=c)=1 \Leftrightarrow \mathrm{Var}(X)=0$.
- $\mathrm{Var}(aX+bY) = a^2\,\mathrm{Var}(X) + 2ab\,\mathrm{Cov}(X,Y) + b^2\,\mathrm{Var}(Y)$
- $\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2\,\mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j} a_i a_j\,\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$

Regneregler for kovarians

- X og Y uafhængige $\Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y)=0$
- $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$

- $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{Var}(X)$
- $\mathrm{Cov}(aX, bY) = ab\,\mathrm{Cov}(X, Y)$
- $\mathrm{Cov}(X + Y, Z) = \mathrm{Cov}(X, Z) + \mathrm{Cov}(Y, Z)$
- $\mathrm{Cov}(X, Y + Z) = \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(X, Z)$
- $\mathrm{Cov}(\sum_i a_i X_i, \sum_j b_j Y_j) = \sum_i \sum_j a_i b_j \,\mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$

Udregning af højere ordens momenter

- Det n'te moment for en stokastisk variabel

$$\mathrm{E}[X^n] = \begin{cases} \sum_{x_k} x_k^n p(x_k) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\,dx \end{cases}$$

- Det n'te centrale moment:

$$\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^n] = \begin{cases} \sum_{x_k} (x_k - \mu)^n p(x_k) \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^n f(x)\,dx \end{cases}$$

hvor $\mu = \mathrm{E}[X]$.

29.1.2010
Bo Rosbjerg