Sidste opgave til lektion 2 og 3:

6

6.1 Et 99,7% konfidensinterval er givet ved

$$9.91 \pm 3 \frac{\sqrt{0.000289}}{\sqrt{100}} =$$

$$[9.9049 ; 9.9151]$$

Dette taler imod, at den sande middelværdi er 10!

6.2 For en tilfældig udvalgt bolt er vores bedste bud på middelværdi og varians 9,91 og 0.000289.

En normalfordelt variabel med middelværdi 9,91 og varians 0,000289 vil ligge i intervallet

$$9,91 \pm 3\sqrt{0.000289} = [9,859 , 9,961]$$

med 99,7 % sandsynlighed.

Dette resultat taler ikke imod, at tolerancekravet ikke er opfyldt.

7)

Lad X angive antal defekte i stikprøven. Da er estimatet for den ukendte sandsynlighed p for defekt lig $\frac{X}{1000}$.

Da X er binomialfordelt $b(1000, p)$ er variansen for X

$$\mathrm{Var}\,X = 1000\,p\,(1-p)$$

og $$\mathrm{Var}\left(\frac{X}{1000}\right) = \frac{1}{1000^2}\,1000\,p\,(1-p)$$

$$= \frac{p\,(1-p)}{1000}.$$

Observeres $X = 7$ bliver $\hat{p} = \frac{7}{1000} = 0.007$

Antages det, at $\hat{p}$ er normalfordelt

$\left(\text{CLT da } \frac{X}{1000} = \frac{1}{1000}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{1000}) \right)$

fås et 95 % konfidensinterval

$$\hat{p} \pm 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{1000}} = [0.0017, 0.012]$$

Dette interval er ikke i modstrid med, at den sande værdi af p er 0.005.

8) Se R-kode

Ekstra opgaver (lektion 4)

Middelværdi og varians

1 a) $EX = -1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} = 0$

$\text{Var } X = \frac{1}{4}(-1-0)^2 + \frac{1}{2}(0-0)^2 + \frac{1}{4}(1-0)^2 = \frac{1}{2}$

b) $EX = -1 \frac{18}{20} + 0 \cdot \frac{1}{20} + 1 \frac{1}{20} = -0.85$

$\text{Var } X = \frac{18}{20}(-1-(-0.85))^2 + \frac{1}{20}(0-(-0.85))^2 + \frac{1}{20}(1-(-0.85))^2 = 0.2275$

2

a) $EX = EX_1 + EX_2 + \cdots + EX_{10} = 10 \cdot 1 = 10$

$\text{Var } X = \text{Var } X_1 + \text{Var } X_2 + \cdots + \text{Var } X_{10} = 10 \cdot 2 = 20$

b) $E \frac{1}{10} X = \frac{1}{10} EX = 1$

$\text{Var } \frac{1}{10} X = \frac{1}{100} \text{Var } X = \frac{20}{100} = \frac{2}{10} = 0.2$

c) $\text{Var } \frac{1}{n} X = \frac{1}{n^2} \text{Var } X = \frac{1}{n^2} \cdot 2 \cdot n = \frac{2}{n}$

$\frac{2}{n} = 0.1 \Leftrightarrow n \cdot 0.1 = 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{n = 20}}.$

Binomial fordeling

1 a) $0, 1, 2, \ldots, 20$

b) $EX = 20 \cdot 0.9 = 18$

$VarX = 20 \cdot 0.9 \cdot 0.1 = 1.8$

c) $P(X \leq 2) = 1.6 \cdot 10^{-16}$

$P(X \geq 17) = 1 - P(X \leq 16) = 0.87$

2 a) $X \sim b(500, p)$

b) $\hat{p} = \frac{X}{500}$

c) $Var \frac{X}{500} = \frac{1}{500^2} \cdot 500 \cdot p(1-p)$

$= \frac{p(1-p)}{500}$

d) standardafvigelsen $= \sqrt{\frac{p(1-p)}{500}}$

e) $\hat{p} = \frac{11}{500} = 0.022$

f) $\hat{p} \pm 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{500}} = [0.009; 0.035]$

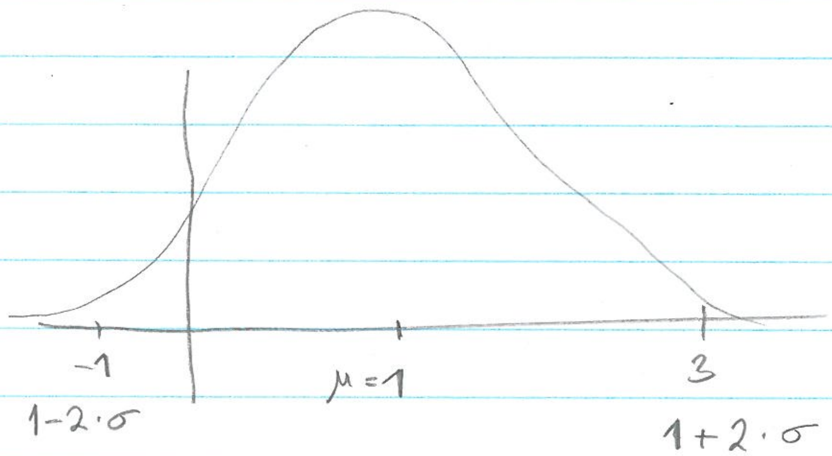
Normalfordeling

1 a) $-2 = 1 - 3 \cdot 1$ dvs

$$P(X \leq -2) = \frac{1 - 0.997}{2} = 0.0015$$

b) $1 \pm 4 \cdot 1 = [-3, 5]$

2)



$$3 = 1 + 2\sigma \Rightarrow \sigma = 1$$

Monte Carlo

Se R-kode.