Uddybende spørgsmål til 'Large sample methods in Bayesian inference side 1-5'

1. Redegør for betydningen af betingelserne I-IV samt de yderligere betingelser der indgår i formuleringen af Theorem 1.
2. Hvad er fortolkningen/implikationerne af resultatet i Theorem 1 ?
3. Giv en detaljeret gennemgang af første del af beviset for Theorem 1 indtil 'In order to prove...' nederst side 4.
4. Giv en detaljeret gennemgang af anden del af beviset indtil 'Next to prove...'
5. Giv en detaljeret gennemgang af sidste del af beviset.
6. Hvor er der fejl henholdsvis huller i beviset ?
7. Gør rede for at den marginal tæthed $f(X_n)$ kan approksimeres ved $\hat{C}_n f(X_n|\hat{\theta}_n)/\sqrt{n}$ hvor $\hat{C}_n = \pi(\theta_0)(2\pi)^{1/2} I^{-1/2}(\theta_0)$, og at fejlen relativt til $f(X_n)$ går mod nul (Laplace approksimation).
8. Redegør for, hvorledes et bevis for asymptotisk normalitet i et frekventistisk set-up kan gennemføres vha. betingelsen II.
9. Betragt Poisson-Gamma eksemplet slide 11 til 9. lektion. Hvordan forholder den posteriore varians og middelværdi sig til maximum likelihood estimatet og den inverse observerede information ? Kan Theorem 1 anvendes på dette eksempel ?

Uddybende spørgsmål til 'Prior distributions for variance parameters in hierarchical models'

Generelle spørgsmål:

1. Giv en oversigt over begreberne som introduceres i afsnit 2.
2. Giv en oversigt over inverse-gamma og foldede t-prior fordelinger (afsnit 3).
3. Giv en oversigt (inklusiv plots) over uniform og inverse-gamma prior fordelinger (afsnit 4).

4. Giv en oversigt over resultaterne fra 8-schools data eksemplet (afsnit 5).

Detaljerede spørgsmål:

D1: Hvis vi bruger en flad prior for $\log \sigma_y$ hvad er da de prior fordelinger for σ_y og σ_y^2 ?

D2: Vis for modellen (1), at normalfordelinger henholdsvis invers-gamma fordelinger er betinget konjugerede for μ, α_j, σ_y^2 og σ_α^2.

D3: Betragt modellen (1) og antag, at $\mu = 0$ og $\sigma_y^2 = 1$ er kendte. Antag også for nemheds skyld at $n_j = m > 1$ (balanceret design). Vis, at vi får en egentlig posterior fordeling for σ_α i grænsen $A \to \infty$ når $U(0, A)$ benyttes for σ_α og $J \geq 1$.

D4: Betragt modellen (1) og antag, at $\mu = 0$ og $\sigma_y^2 = 1$ er kendte. Antag også for nemheds skyld at $n_j = m > 1$ (balanceret design). Vis, at posterioren for σ_α ikke er egentlig i grænsen $\epsilon \to 0$ når en invers-gamma(ϵ, ϵ) benyttes for σ_α.

D5: (miskalibrering). Betragt modellen (1) og lad

$$\mathbb{E}_A(\sigma_\alpha|Y) = \frac{\int_0^A \sigma_\alpha f(y|\sigma_\alpha)\mathrm{d}\sigma_\alpha}{\int_0^A f(y|\sigma_\alpha)\mathrm{d}\sigma_\alpha}$$

være den posteriore middelværdi af σ_α når $\sigma_\alpha \sim U(0, A)$. Vis, at $\mathbb{E}_A(\sigma_\alpha|y) - \mathbb{E}_1(\sigma_\alpha|y) > 0$. Antag, at den 'sande prior' er $\sigma_\alpha \sim U(0, 1)$. Hvad kan vi da sige om bias af $\mathbb{E}_A(\sigma_\alpha|y)$ som et estimat af σ_α ? (bias er $\mathbb{E}(\mathbb{E}_A[\sigma_\alpha|Y] - \sigma_\alpha)$ hvor den yderste middelværdi er mht. fordelingen af (Y, σ_α) når σ_α følger $U(0, 1)$).

D6: Redegør for hvorledes modellen (2) forholder sig til (1). Vis at normal for ξ og inverse-gamma for σ_η^2 er betinget konjugerede for modellen (2).

D7: Redegør for detaljerne vedr. den foldede t-prior (sidste halvdel af afsnit 3.2).

D8: Betragt modellen (1) og antag, at $\mu = 0$ og $\sigma_y^2 = 1$ er kendte. Antag også for nemheds skyld at $n_j = m > 1$ (balanceret design). Vis, at posterioren for σ_α ikke er egentlig når $p(\sigma_\alpha) = 1/\sigma_\alpha$.

D9: Hvad mener I om sidste halvdel af afsnit 4.1 ?

D10: Prøv evt. at implementere en Gibbs sampler (se nedenfor) for modellen (1).

Vink til D3, D4 og D8: benyt at I ved $Y|\sigma_\alpha \sim N(0, I + \sigma_\alpha ZZ^T)$ for en passende design matrix Z (model i vektorform). Dermed kan I direkte se på $p(\sigma_\alpha|y) \propto f(y|\sigma_\alpha)p(\sigma_\alpha)$

'conditional conjugancy': antag vi benytter priors $p_j(\theta_j)$, $j = 1, \ldots, J$. En prior p_j siges da at være betinget konjugeret hvis $p(\theta_j|y, \theta_1, \ldots, \theta_{j-1}, \theta_{j+1}, \ldots, \theta_J)$ tilhører samme fordelingsklasse som p_j.

Gibbs sampler: vi kan generere simulationer fra posterioren $p(\theta_1, \ldots, \theta_J|y)$ iterativt. Vi starter algoritmen i en arbitrær værdi $\theta^0 = (\theta_1^0, \ldots, \theta_J^0)$. For at genere den $i+1$'te sample θ^{i+1} givet den forrige sample $\theta^i i$ gør vi som følger: simuler θ_l^{i+1} fra den betingede fordeling $p(\theta_l|y, \theta_1^{i+1}, \ldots, \theta_{l-1}^{i+1}, \theta_{l+1}^i, \ldots, \theta_l^i)$, $L = 1, \ldots, J$. Dette resulterer i en Markov kæde $\theta^0, \theta^1, \theta^2, \ldots$ som giver en sample fra den posteriore fordeling (efter kæden er kommet i ligevægt).