Hypotesetests, fejltyper og p-værdier

- og er den nu også det?

Søren Højsgaard

Institut for Matematiske Fag, Aalborg Universitet

(updated: 2019-03-17)

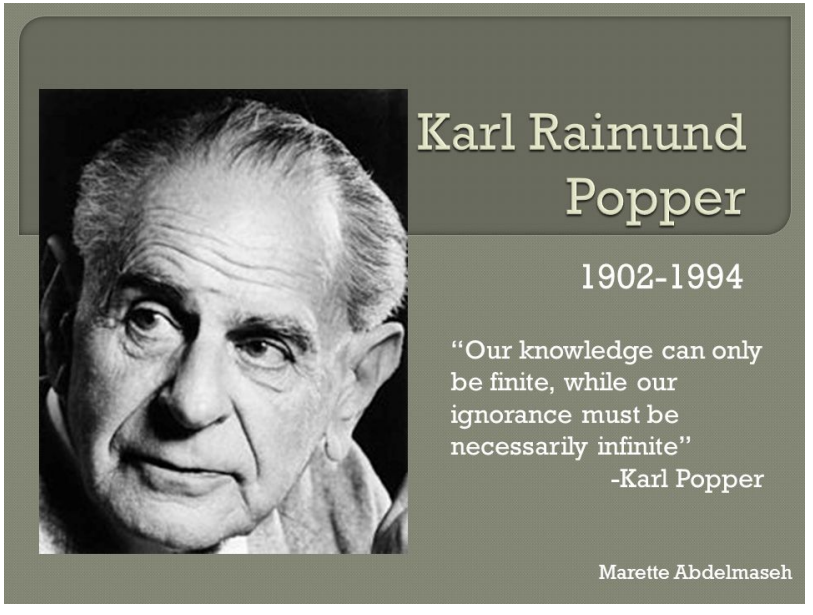
Statistisk test

- Et statistisk test er en konfrontation af virkelighenden (data) med en teori (model).
- Laves med det formål at forsøge at falsificere modellen.
- Alternativt: Man bruger data til at "bevise" at man ikke har ret.
- NB: I statistik hedder det ET test; ikke EN test!

Karl Popper (1902-1994)

Passer ind Karl Poppers (1902-1994) videnskabsteori:

- Man kan ikke empirisk verificere videnskabelige teorier; kun falsificere dem.
- Videnskabelige fremskridt sker ved at "man har en teori indtil den bliver falsificeret"
- Se "Conjectures and Refutations" og "The Logic of Scientific Discovery"



Statistikkens tolkningsregel

I statistikken anlægger man følgende tolkningsregel:

> **Det usandsynlige sker ikke**

- Altså, hvis man observerer data der, hvis modellen er rigtig, er meget usandsynlige, så forkaster man modellen.
- Nødvendigt med sådan en tolkningsregel, for ellers kan man aldrig ad statistisk vej erkende noget som helst! Man vil jo altid kunne hævde, at det foreliggende datasæt blot er et *uheldigt* udfalg, som ganske vist er usandsynligt men dog muligt.
- Eksempel: At slå 20 gange "krone" i 20 kast med en fair mønt sker med ssh $\approx 10^{-6}$; dvs. ca.\ 1 ud af $1.000.000$ gange. 20 gange krone er et *muligt* udfald, men det er ikke videre *sandsynligt*. Så derfor har vi mere fidus til at mønten ikke er fair -- altså at modellen er forkert.

Fødes der lige mange drenge og piger?

Over en årrække blev disse data indsamlet (på et hospital i London) - det STORE datasæt:

	drenge	piger	total
antal	6.389	6.135	12.524
andel	0,51	0,49	1,00

Vi skal senere bruge et mindre datasæt, 10% af det store datasæt - det LILLE datasæt:

	drenge	piger	total
antal	639	614	1.253
andel	0,51	0,49	1,00

	drenge	piger	total
antal	6.389	6.135	12.524
andel	0,51	0,49	1,00

- Er der 50--50 chance for en dreng og en pige?
- Tydeligvis ikke -- i dette datasæt.
- Men hvad med *populationen*? 51\% er ikke langt fra 50\% og afvigelsen kunne jo skyldes en tilfældighed.
- Spørgsmålet er: Er afvigelsen så stor, at den ikke -- med rimelighed -- kan tilskrives en tilfældighed?

Model for data:

For at komme videre skal vi have en model -- en mekanisme, der kunne have genereret data:

Uden antagelser, ingen konklusioner. Vi antager

- Alle kvinder har samme sandsynlighed θ for at føde en dreng.
- Udkommet af alle graviditeter er uafhængige -- også forskellige graviditeter for samme kvinde og også for forskellige graviditeter for samme mand.

Er disse antagelser rimelige? Tjoh -- måske -- i hvert fald: uden antagelser, ingen konklusioner.

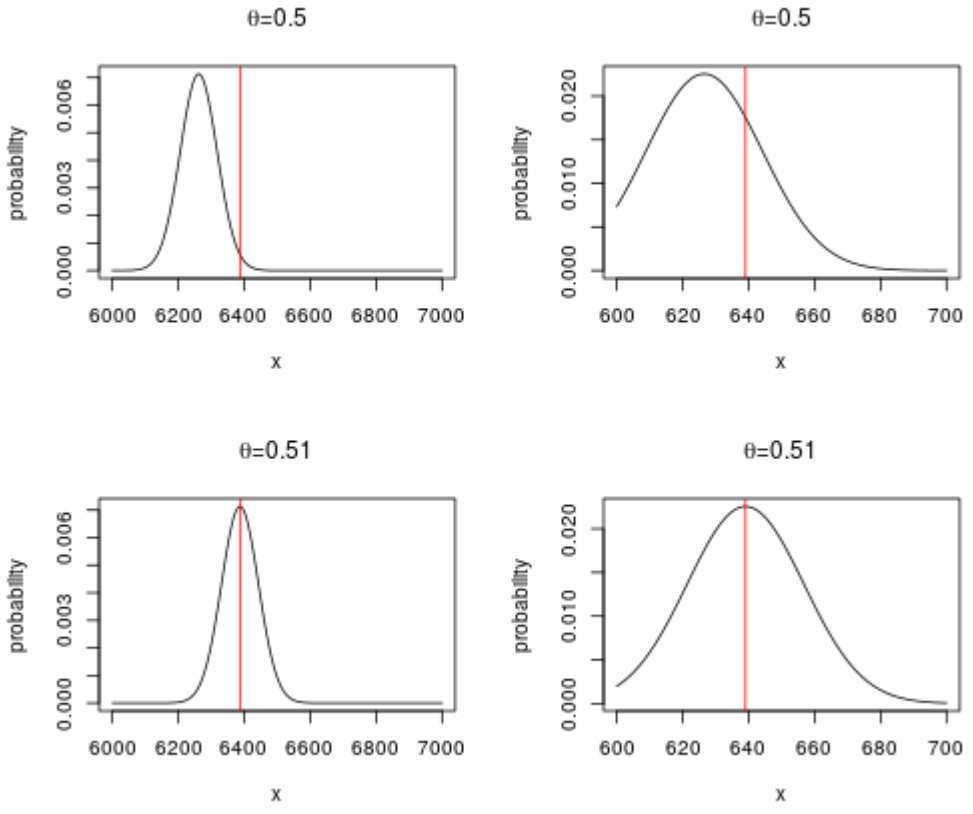
Fører til at antal drengefødsler X er binomialfordelt

$$X \sim bin(N, \theta), \quad N = 12524$$

Dvs ssh for at observere x drenge i N fødsler hvor der hver gang er ssh θ for en dreng er

$$Pr(X = x; \theta) = \binom{N}{x} \theta^x (1-\theta)^{N-x}$$

Tætheder for binomialfordelingen



Man kan antage at ssh er 50\% og så se på hvordan data *kunne have set ud*

drenge	piger	total	drenge	piger	total
6263	6261	12524	6252	6272	12524
6223	6301	12524	6271	6253	12524
6243	6281	12524	6298	6226	12524
6263	6261	12524	6324	6200	12524
6403	6121	12524	6215	6309	12524

Sammenlign med de observerede data

drenge	piger	total
6389	6135	12524

NB: Der er eet simuleret datasæt, der ligeså mange eller flere drenge som vi har observeret.

Det LILLE datasæt

drenge	piger	total	drenge	piger	total
627	626	1253	625	628	1253
615	638	1253	631	622	1253
623	630	1253	639	614	1253
627	626	1253	613	640	1253
670	583	1253	600	653	1253

Sammenlign med de observerede data

drenge	piger	total
639	614	1253

NB: Der er to simulerede datasæt, der ligeså mange eller flere drenge som vi har observeret.

Hypotesetest

- Et "fagligt" spørgsmål: Fødes der lige mange drenge og piger?
- Oversættes til statistisk spørgsmål: "Er θ (ssh for en dreng) lig med $1/2$"?
- Plejer at formulere det som hypotese:
  - Tester null-hypotesen: $H_0 : \theta = \theta_0$, hvor $\theta_0 = 1/2$ mod den
  - Alternative hypotese: $H_A : \theta \neq \theta_0$.
- Taler om at forkaste eller acceptere hypotesen.
- Måske burde man erstatte "acceptere" med "ikke forkaste" -- men det lader sig næppe ændre.
- Poppers tankegang: At forkaste hypotesen er den **stærke konklusion**

Klassisk fremgangsmåde:

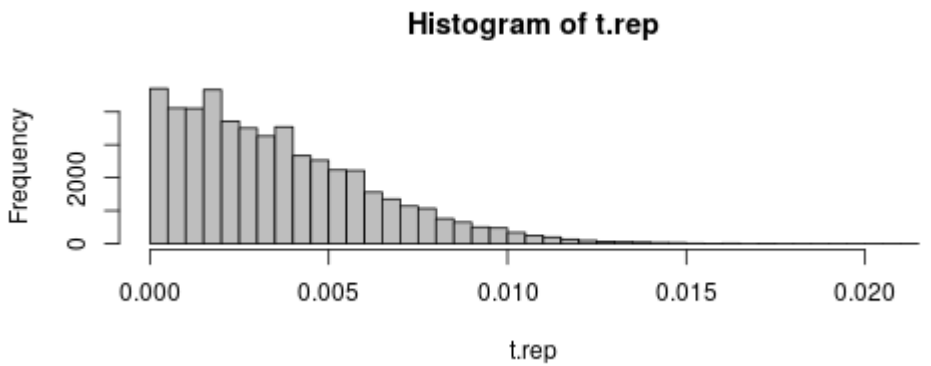
- Lad x betegne data.
- Vælg en funktion $t(x)$, der har den egenskab, at $t(x)$ er (numerisk) stor, hvis data ikke passer på modellen og lille ellers.
- Kalder $t(x)$ en teststørrelse (eng: test statistic).
- Kunne f.eks. tage

$$t(x) = |x/N - \theta_0| = |x/N - 1/2|$$

- Vi får den observerede teststørrelse $t_{obs} = t(x) = t(6389) = 0.0101$
- Er t_{obs} et stort eller lille tal?
- Svaret ligger i at spørge: Hvad er sandsynligheden for i fremtiden at se værdier af $t(x)$ der er større end t_{obs} hvis $\theta = \theta_0$?

Tankegangen er nu:

- Lad os nu antage, at der findes en afkrog et sted på jorden, hvor vi (af en eller anden grund) ved, at i denne afkrog er hypotesen sand, dvs. $\theta = \theta_0 = 1/2$.
- I denne afkrog gentager vi studiet M gange, hvor studiet består i:
  1. venter på, at $N = 12524$ børn er født og
  2. noterer os antal drenge x^j for $j = 1, \ldots, M$.
- Beregn $t(x^j)$ for hvert x^j og tegn et histogram af $t(x^j)$'erne.
- Vi behøver ikke lede efter denne afkrog på jorden; computeren er opfundet og vi kan lave studiet ved simulation (et "in silico trial"):



- Tænk på, at vi skal tage en beslutning: **Acceptere** H_0 eller **forkaste** H_0.
- Laver en beslutningsregel: Forkast H_0 hvis $t(x)$ er "stor";
- mere konkret:

  > **forkast** H_0 **hvis** $t(x) \geq c$

- Tallet c kaldes den **kritiske værdi**.
- Indtil videre har vi ingen idé om hvordan denne kritiske værdi c vælges; kommer senere.

- Der er to typer fejl vi kan begå:
  - Forkaste H_0 selvom H_0 er sand; kaldes **type-I** fejl
  - Acceptere H_0 selvom H_0 er falsk; kaldes **type-II** fejl
- Man fastlægger ofte at ssh for at begå en type-I fejl skal være mindre end et lille tal α; f.eks. $\alpha = 0.05$.

$$Pr_{\theta_0}(\text{Forkaste } H_0) \leq \alpha$$

hvor $Pr_{\theta_0}()$ indikerer, at ssh er beregnet for $\theta = \theta_0$.

- Hvis beslutningsreglen er "Forkast H_0 hvis $t(x) \geq c$ så kan vi finde c fra:

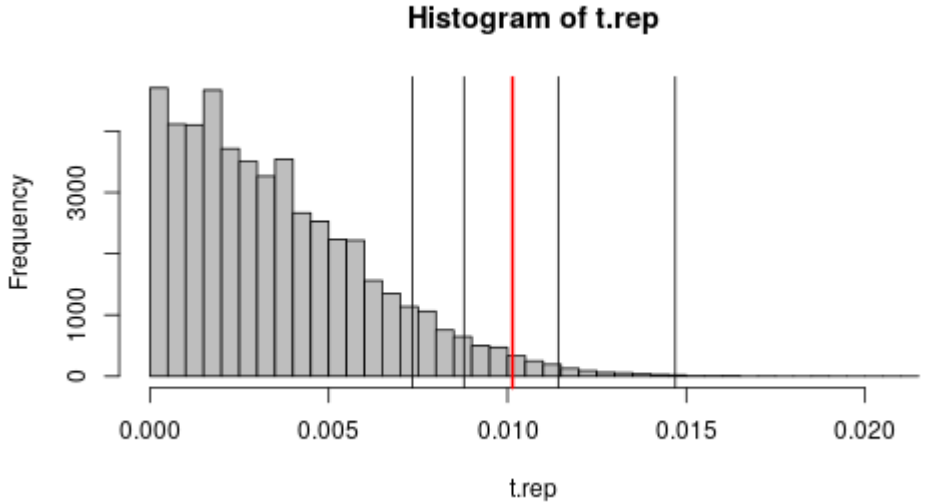
$$Pr_{\theta_0}(t(X) \geq c) \leq \alpha$$

- Beslutningsreglen bliver så: Forkast H_0 hvis $t(x) \geq c$.
- Hvis $t(x) \geq c$ siger man, at **testet er signifikant på niveau** α.

- For hvert α kan finde den kritiske værdi c_α:

```
##       0.1      0.05      0.01     0.001
## 0.007346 0.008783 0.011418 0.014692
```

Sammenholder med t_{obs} = 0.0101



Vi siger at testet er **signifikant på niveau** 5% (men ikke signifikant på niveau 1%).

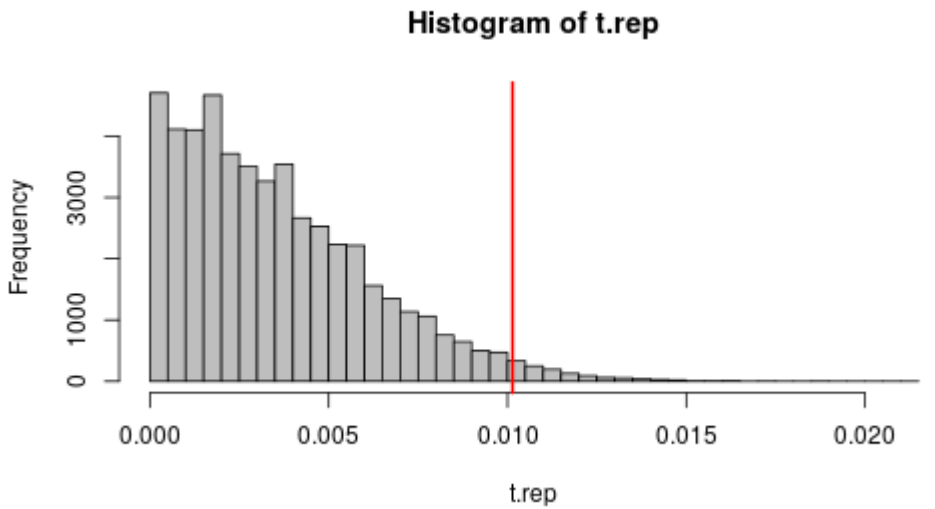
Ofte bruger man **signifikansniveauerne** 0.10, 0.05, 0.01 og 0.001 -- men der er altså intet "guddommeligt" over disse tal; de har alene historiske grunde.

p-værdien

En lidt anden tilgang er: Beregn p-værdien (også kaldet testsandsynligheden) der er defineret som

$$p = Pr_{\theta_0}(t(X) \geq t_{obs})$$

-- altså ssh for at observere en værdi at teststørrelsen $t()$ der er større end den vi aktuelt står med. Vi får p-værdien er 0.0235



- Dermed kan man sige, at p-værdien er et mål for "graden af evidens mod en hypotese".
- Giver i nogle sammenhænge langt mere mening end at gøre problemet til et beslutningsproblem.

Fejltyper: type-1 fejl og type-2 fejl

Verdens sande tilstand - og de beslutninger vi træffer.

	H_0 **hypotese accepteres**	H_0 **hypotese forkastes**
H_0 hypotese er sand		type-I fejl
H_0 hypotese er falsk	type-II fejl	

At forkaste H_0 selvom H_0 er sand kaldes en type-1 fejl

At acceptere H_0 selvom H_0 er falsk kaldes en type-2 fejl

Som ved retssag:

	H_0 **uskyld accepteres**	H_0 **uskyld forkastes**
H_0 anklagede uskyldig		"justitsmord"
H_0 anklagede skyldig	en "fejl" vi lever med	

Man lader tvivlen komme den anklagede til gode: "Man er uskyldig til noget andet er bevist".

Med mindre der er stærk evidens (data) mod H_0 så accepterer man H_0.

Fortolkning af p-værdier

- Tilbage til det oprindelige spørgsmål: Er der 50-50 chance for en dreng og en pige?
- En p-værdi kan opfattes som et mål for evidencen MOD en hypotese: En lille p-værdi indikerer stor evidens mod hypotesen.
- Her er p-værdien lille så det får os til at tvivle på hypotesen.
- Kan vi deraf konkludere, at null-hypotesen $H_0 : \theta = \theta_0 = 1/2$ er falsk? Har vi "bevist", at $\theta \neq 1/2$.
- Nej. Hvis $\theta = 1/2$, så er sandsynligheden for at observere 6389 drenge i 12524 graviditeter er 0.00054 eller knapt 1 ud af 2000 gange. Det er en lille sandsynlighed, bevares, men det er afgjort muligt selv hvis hypotesen er sand.
- Der er dog mange studier, der peger på, at der fødes flere drenge end piger.

- Some tider fortolkes en p-værdi fejlagtigt som noget i retningen af

> **p-værdien er sandsynligheden for at hypotesen er sand**.

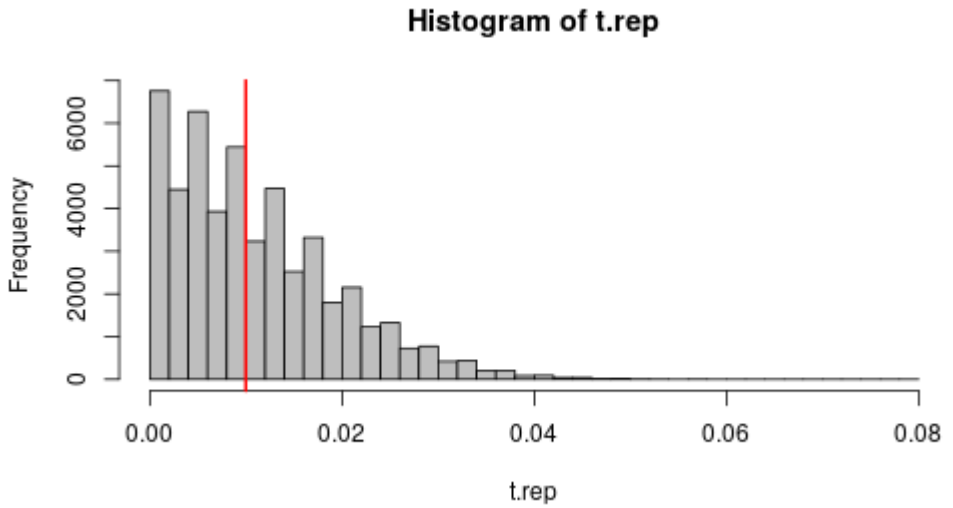
- Dette er forkert: Sandsynligheder er noget vi knytter til fænomener, hvor der er usikkerhed om udkommet (kast med en mønt eller en terning).
- Der er ingen usikker om hypotesen: Hypotsen er enten sand eller falsk (vi ved bare ikke hvad den er, for vi har ingen guddommelig indsigt).

Effekten af stikprøvestørrelsen

Det LILLE datasæt:

	drenge	piger	total
antal	639	614	1.253
andel	0,51	0,49	1,00

Dvs vi har kun 10\% of data, men andelen af drenge er stadig 0.51.


Histogram of t.rep
Frequency
0
2000
4000
6000
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
t.rep

Hvad kan vi så konkludere?

t_{obs} er som før (på nær nogle decimaler): 0.01 men

- Med 12524 børn og 6389 drenge er der stærk evidens mod hypotesen $\theta = \frac{1}{2}$: Vi får at p-værdien er 2%.
- Med 1253 børn og 639 drenge er der meget lidt evidens mod hypotesen: Vi får at p-værdien er 0.4975
- I begge tilfælde er andelen af drenge 0.51. Hvad skal vi mene om dette?

- Vi formulerer en hypotese om "verdens sande tilstand", og dernæst "spørger vi data" om der er evidens **mod** denne hypotese.
    - Hvis der ikke er evidens mod hypotesen, kan det være fordi hypotesen er sand, eller
    - fordi der ikke er tilstrækkeligt data (information) til at komme med denne evidens (altså til at "påvise" at hypotesen er forkert)

Igen: tænk på p-værdien som mål for evidens mod hypotesen

- p-værdien afspejler "afstand" mellem data og model (mellem $\hat{\theta} = 0.51$ og $\theta_0 = 0.5$)
- p-værdien afspejler OGSÅ mængden af data.

Mere poetisk:

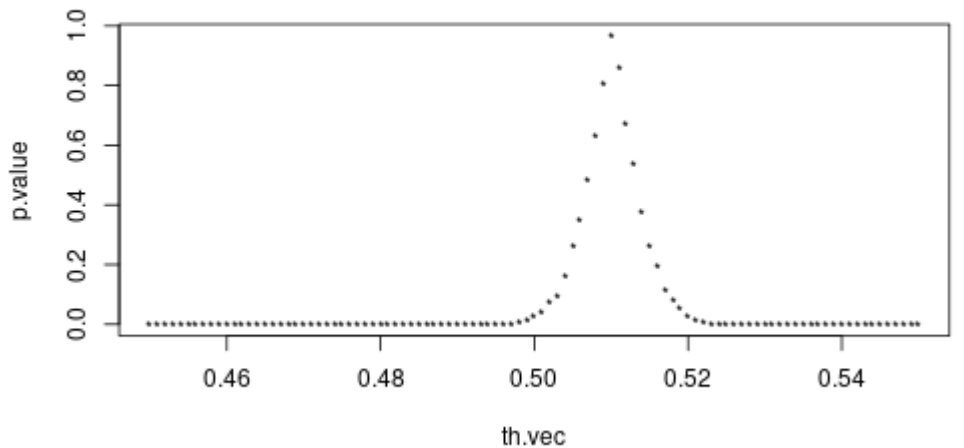
"Absence of evidence (of an effect) is NOT the same as evidence of absence (of an effect)."

Test og konfidensinterval -- to sider af samme sag

Vi testede ovenfor hypotesen $\theta = \theta_0$ hvor $\theta_0 = 1/2$.

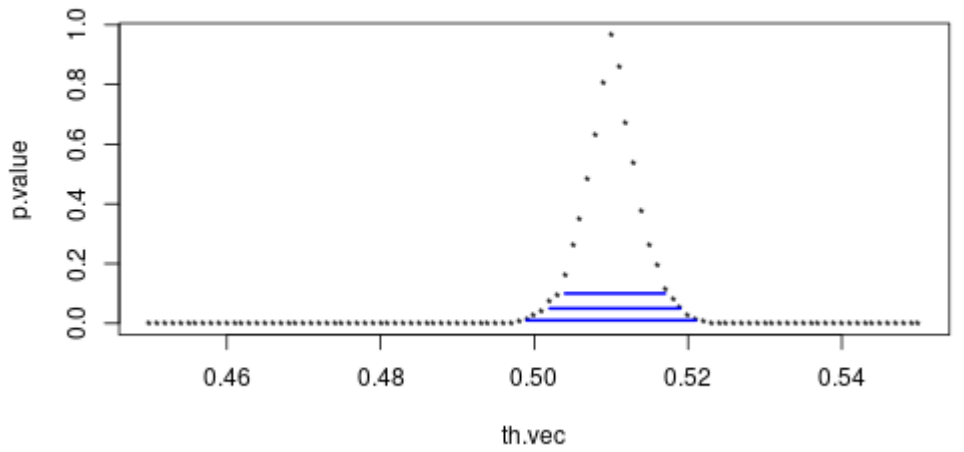
Vi kunne teste samme hypotese for mange andre værdier af θ_0.

For hver værdi af θ_0 beregner vi p-værdien og plotter mod θ_0



Husk: Små p-værdier er evidens mod hyptesen.

Indlæg intervaller hvor p-værdien er større end 0.01, 0.05 og 0.10.

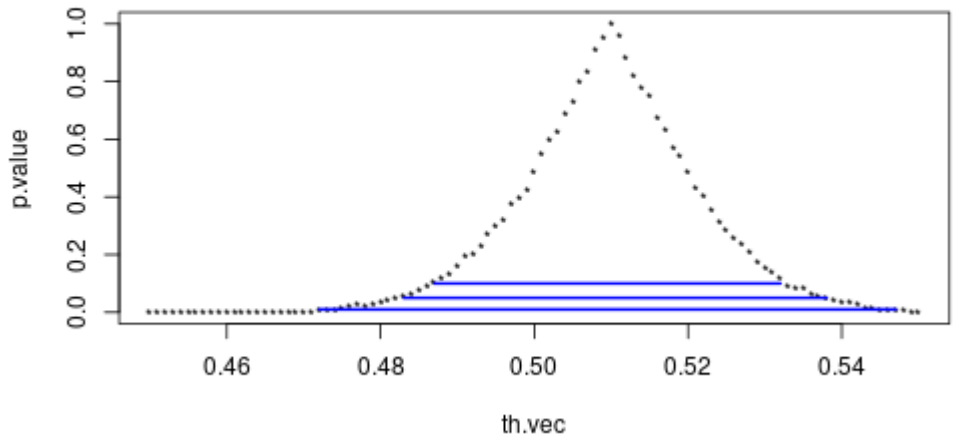


Disse intervaller er præcist 99%, 95% og 90% **konfidensintervaller**:

99% konfidensinterval: [0.499; 0.521]

95% konfidensinterval: [0.502; 0.519]

90% konfidensinterval: [0.504; 0.517]



Disse intervaller er præcist 99%, 95% og 90% **konfidensintervaller**:

99% konfidensinterval: [0.475; 0.547]

95% konfidensinterval: [0.483; 0.538]

90% konfidensinterval: [0.487; 0.532]

Tekstbogsudgaven af test i binomialfordelingen

Tekstbogsudgaven af test i binomialfordelingen er ofte baseret på at man - på baggrundt af CLT - laver en test-størrelse, der har en kendt fordeling: En normal-fordeling eller en χ^2 fordeling. Dette var vigtigt i "gamle dage" hvor man ikke havde computere til at gøre som ovenfor. Her een udgave af sådan et test.

Lad $X \sim bin(N, \theta)$.

- Så er $E(X) = N\theta$, $var(X) = N\theta(1-\theta)$ og $sd(X) = \sqrt{N\theta(1-\theta)}$.
- Ydermere, X er - pga. CLT - approximativt normal (sum af N uafhængige $0/1$-variable).
- Derfor er $E(X/N) = \theta$ og $var(X/N) = \theta(1-\theta)/N$ og $sd(X/N) = \sqrt{\theta(1-\theta)/N}$.

Definer

$$t(X) = \frac{X/N - E(X/N)}{\sqrt{var(X/N)}} = \frac{X/N - \theta}{\sqrt{\theta(1-\theta)/N}}$$

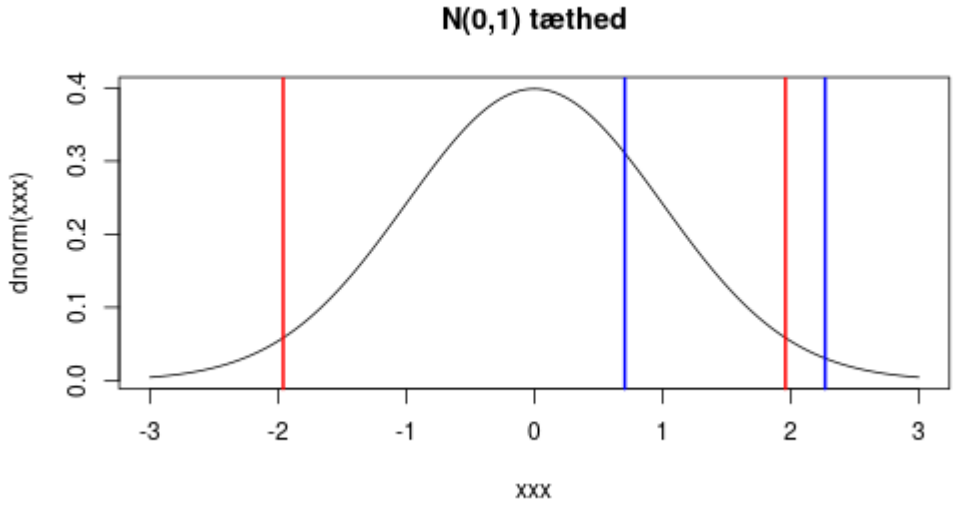
`

- Så er $E(t(X)) = 0$ og $var(t(X)) = 1$.
- Ydermere, så er $t(X)$ approximativt $N(0,1)$-fordelt.
- NB $t(X)$ "måler", hvor mange standardafvigelser X/N er fra sin middelværdi.

Vi vil teste hypotesen $H_0 : \theta = \theta_0$. **Hvis** hypotesen er sand så kan vi indsætte θ_0 i udtrykket ovenfor og $t(X)$ vil stadig have en $N(0,1)$ fordeling.

Vi kan så vurdere om $t(X)$ er ekstremt langt væk fra 0 i en normalfordeling.

Stort datasæt: $t(x) = 2.2697$, lille datasæt: $t(x) = 0.7063$



Både store og små værdier er kritiske nu.

Vi tester på niveau $\alpha = 5\%$. Beslutningsregel: Undlad at forkaste H_0 hvis $-c < t(X) < c$. Vi kan finde c udfra

$$Pr_{\theta_0}(-c < t(X) < c) \leq \alpha$$

Vi finder så at $c = 1.96 \approx 2$. Derfor forkastes hypotesen i det store datasæt og accepteres i det lille datasæt - helt som før.

Statistisk signifikans, praktisk signifikans, klinisk signifikans...

Oprindelsen er det latinske **significantia**, der betyder **betydning**

Når man finder en statistisk signifikant "effekt" så betyder det, at den effekt man ser er for stor til -- med rimelighed -- at kunne tilskrives tilfældigheder.

Mange studier, der viser, at der fødes ca. 50.5% drenge og 49.5% piger.

Men når man venter et barn så tænker man, at der er 50--50 chance for hvert køn.

Den statistiske signifikans betyder altså ikke nødvendigvis så meget i praksis...

Man finder det samme fænomen i sundhedsverdenen: En statistisk signifikant effekt kan sagtes være så svag, at den ikke er **klinisk** relevant for patienten.

Estimation (by request)

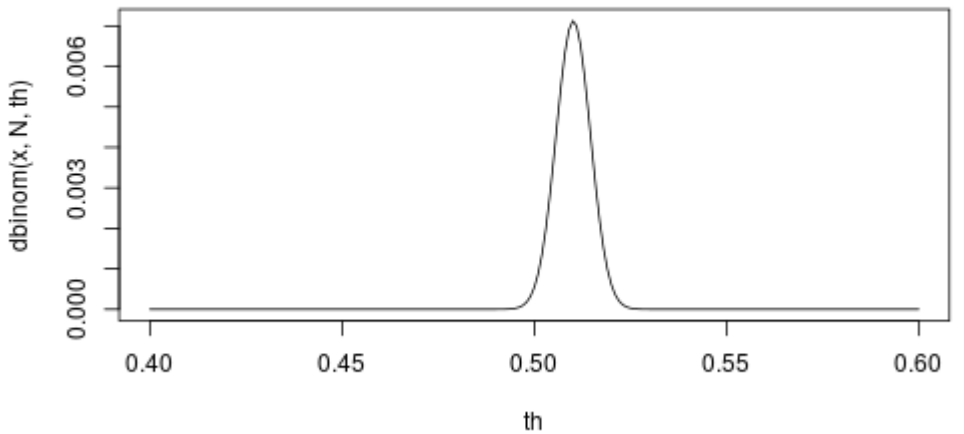
- Estimation af θ i binomialfordelingen
- Det er ikke helt oplagt at bruge mindste kvadraters metode.
- Alternativ: Maximum Likelihood Metoden:
- Model: $X \sim bin(N, \theta)$
- Binomial tæthed

$$Pr(X = x; \theta) = \binom{N}{x} \theta^x (1 - \theta)^{N-x}$$

- Når data er observeret $x = 6389$ med $N = 12524$ så bliver ovenstående en funktion af θ alene. Man kalder så funktionen for **likelihood funktionen**

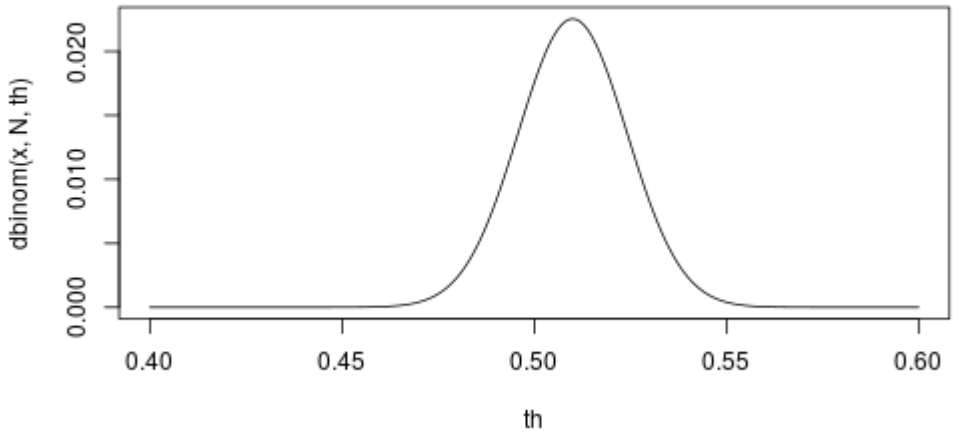
$$L(\theta) = Pr(X = x; \theta)$$

- Plot $L(\theta)$ mod forskellige værdier af θ



- Den værdi af θ der maximerer L kaldes **maximum likelihood estimatet** (MLE).
- Det er oftest lettere at maximere $l(\theta) = \log L(\theta)$ og MLE bliver $\hat{\theta} = x/N$
- MLE er på mange måder det bedst tænkelige estimat man kan opnå.

- For det lille datasæt får vi



- Samme maximum, men likelihood funktionen er mindre peaked -- svarende til at der er større usikkerhed på estimatet fordi datasættet er mindre.

Mindste kvadrater og MLE

- Hvad så med regressionsmodellen og mindste kvadrater?
- Model: $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i$
- Samme som at sige $y_i \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_i, \sigma^2)$
- Normalfordelingstæthed bliver

$$f(y_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i))^2)$$

- Hvis $y_1, \ldots, y_N$ er uafhængige så er

$$f(y_1, \ldots, y_N) = \prod_{i=1}^{N} f(y_i)$$

- Bliver helt konkret

$$f(y_1, \ldots, y_N) = (\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}})^N \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i))^2)$$

- Antag nu at σ er kendt. Så er likelihood funktionen

$$L(\beta_1, \beta_2) \propto \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i))^2)$$

- Pga af minus i eksponenten så maximeres L ved at minimere

$$\sum_{i=1}^{N}(y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i))^2$$

- Dvs i regressionsmodellen er mindste kvadrater og MLE det samme.