

# GUILLOCHEMØNSTRE

LISBETH FAJSTRUP

Guillochémønstre blev omtalt i Numb3rs udsendelsen om pengeforfalskning. Et eksempel på et Guilloché mønster er cykloiden, som er den kurve, et punkt på kanten af et cykelhjul beskriver, når hjulet ruller. Matematisk set er det kurven

$$x(t) = a(t - \sin(t))$$

$$y(t) = a(1 - \cos(t))$$

hvor  $a$  er cirkelens radius.

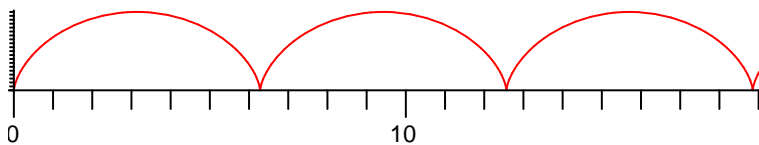


FIGURE 1. Cykloide

Ser man i stedet på, hvordan et punkt et andet sted på hjulet bevæger sig, kan man få andre kurver. Her har jeg ladet punktet være udenfor hjulet. (Se fig.2)

$$x(t) = a(t - 2\sin(t))$$

$$y(t) = a(1 - 2 \cos(t))$$

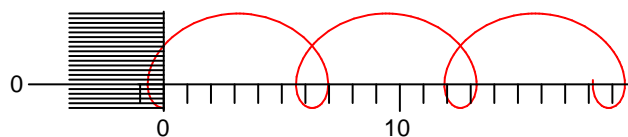


FIGURE 2. Generaliseret cykloide

Nu er det ikke svært at generalisere endnu mere: Hvad med at lade cirklen løbe inden i en anden cirkel - som i børnenes spirografer -

$$x(t) = (R - r) * \cos(t) + h * \cos\left(\frac{R - r}{r}t\right)$$

$$y(t) = (R - r) * \sin(t) - h * \sin\left(\frac{R - r}{r}t\right)$$

hvor  $R$  er radius i den store cirkel,  $r$  er radius i den lille, og  $h$  er afstanden fra centrum i den lille cirkel til det hul, man har blyanten i. (Kurven hedder en hypotrochoide). Hvis  $R = \frac{2nh}{n+1}$  og  $r = \frac{(n-1)h}{n+1}$  lukker kurven, og giver en "rose". her er eksempler.  $R$ ,  $r$  og  $h$  er skrevet ind foroven på figurerne.

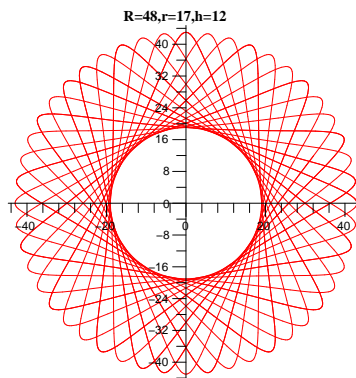
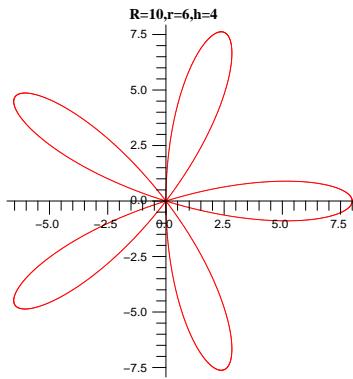
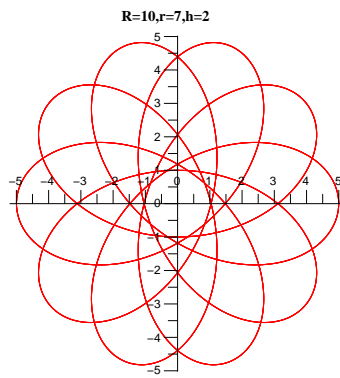
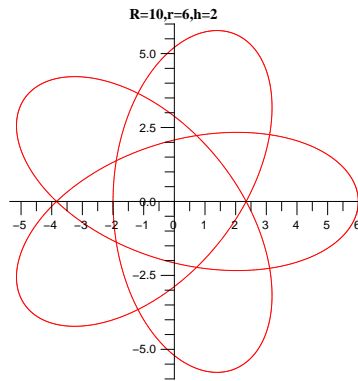
Eller man kan lade cirklen løbe i en cirkel, der løber på en linie<sup>1</sup>:

$$x(t) = 1/2t + 1/2 \cos(-t - \pi/2) + \cos(1/3t - \pi/2)$$

$$y(t) = 1 + 1/2 \sin(-t - \pi/2) + \sin(1/3t - \pi/2)$$

Og man kan parallelforskyde kurverne ovenfor og få et flot mønster som i Fig.4

<sup>1</sup>rettet juni 07 fra parabel til linie



$$R=2, r=1, h=1/2$$

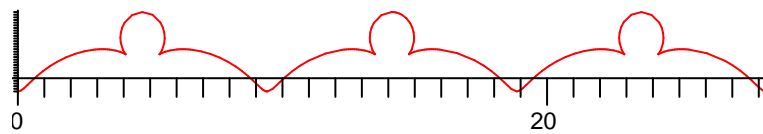
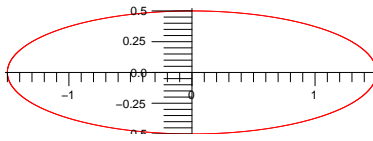


FIGURE 3. Generaliseret cykloide, en cirkel ruller i en cirkel, der ruller på en parabel(!)

[numb3rs.math.aau.dk](http://numb3rs.math.aau.dk)

giver en række links til mange flere billeder.

FAJSTRUP@MATH.AAU.DK

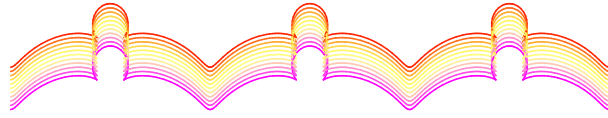


FIGURE 4. Mange kopier af figur 3 parallelforskudt opad