P0-projektforslag til diskrete dynamiske systemer

Esben Høg*, Leif Kjær Jørgensen†, Lisbeth Fajstrup‡ og Mikkel Meyer Andersen§

1. september 2010

I gymnasiet er vækstmodeller differentialligninger: Hvis væksten er proportional med funktionsværdien, kan vi opstille ligningen $f'(t) = af(t)$ og vi kan løse den og få $f(t) = ke^{at}$. Det er en model med *kontinuert tid* - vi kender $f(t)$ for alle t. I mange virkelige problemer giver det bedre mening at sige, at værdien kun er kendt *diskret* - vi måler en gang om måneden, om året, i timen,... De tilhørende ligninger for vækst kaldes differensligninger.

I dette projekt skal I undersøge differensligninger, der altså minder om differentialligninger, blot hvor parametren er diskret. Denne umiddelbare lille forskel viser sig at have stor indflydelse på ligningernes natur.

1 Indledning

Mange af de størrelser, som fx økonomer eller biologer betragter (indkomst, forbrug, opsparing, størrelsen af fx torskepopulationen i Kattegat) fastsættes til faste tidsintervaller, dvs. faste diskrete tidspunkter som hver dag, hver uge, hvert kvartal eller hvert år. Et særkende for disse systemer er altså, at tiden er **diskret** i modsætning til kontinuert, hvor tiden vil kunne variere vilkårligt. At systemet er **dynamisk** vil sige, at det udvikler sig over tiden, i modsætning til et statisk system, der pr. definition ikke ændrer sig.

Hvis man kender størrelsen af fx indkomsten dette år, hvordan kan man bruge denne information til at prædiktere (i.e., forudsige) indkomsten næste år, eller tilsvarende hvis man kender størrelsen af torskepopulationen dette år, hvordan kan man så bruge denne information til at prædiktere populationens størrelse de næste fire år?

Ligninger der relaterer sådanne størrelser til sig selv, men til forskellige tidspunkter kaldes differensligninger.

2 Første ordens differensligninger

Lad $t = 0, 1, 2, \ldots$ angive forskellige diskrete tidsperioder. Man kalder $t = 0$ for *initialperioden.* Hvis $x(t)$ er en funktion defineret for $t = 0, 1, 2, \ldots$, benytter man ofte skrivemåden $x_0, x_1, x_2, \ldots$ til at betegne $x(0), x(1), x(2), \ldots$, og generelt skriver man x_t for $x(t)$.

En 1. ordens differensligning i x_t kan sædvanligvis skrives på formen

$$x_{t+1} = f(x_t), \qquad t = 0, 1, 2, \ldots$$

*esben@math.aau.dk
†leif@math.aau.dk
‡fajstrup@math.aau.dk
§mikl@math.aau.dk

Værdierne, der fremkommer ved evaluering af x_{t+1} for $t = 0, 1, \ldots$ kaldes for **stien** eller **banen** for x_t. Den er en 1. ordens ligning, fordi den relaterer værdien af en funktion i periode $t+1$ til værdien af den samme funktion i den forrige periode t. Altså afhænger værdien af x_{t+1} kun af værdien for ét skridt siden. Generelt afhænger en k. ordens differensligning af de k forrige værdier, hvilket også kan skrives som $x_{t+1} = f\left(x_t, x_{t-1}, \ldots, x_{t-(k-1)}\right)$. I dette projekt kigges kun på 1. ordens differensligninger.

En af de ting, der er interessante at kigge på, er om man kan skrive x_{t+1} ved hjælp af x_0 og $t+1$ i stedet for x_t. Ofte refererer man til x_0 som en **begyndelsesbetingelse**. Det er også interessant at kunne udtale sig noget om, hvordan en differensligning vil opføre sig når t varieres, hvilket naturligvis afhænger af f.

Et vigtigt specialtilfælde er en 1. ordens **lineær** differensligning, hvor f er en lineær funktion, og derfor kan ligningen skrives på formen

$$x_{t+1} = ax_t + b_t, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

hvor a er en konstant og b_t er en kendt funktion af tiden.

Bemærk at (1) lige så godt kunne skrives som

$$x_t = ax_{t-1} + b_{t-1}, \qquad t = 1, 2, 3, \ldots,$$

eller

$$x_{n+1} = ax_n + b_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Ligesom I er vant til, har navnet på variablen altså ingen betydning.

3 Projektemner

I dette afsnit præsenteres en række eksempler på, hvad man i P0-projektet kan kigge nærmere på.

3.1 Simpelt eksempel

Et simpelt eksempel på differensligning (1) er

$$x_{t+1} = \frac{1}{2}x_t, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

hvor $a = \frac{1}{2}$ og $b_t = 0$ for alle t. Det ses, at

$$\begin{aligned}
x_{t+1} &= \frac{1}{2}x_t \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x_{t-1}\right) \quad \text{fordi } x_t = \frac{1}{2}x_{t-1} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^2 x_{t-1} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}x_{t-2}\right) \quad \text{fordi } x_{t-1} = \frac{1}{2}x_{t-2} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^3 x_{t-2} \\
&\vdots \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{t+1} x_{t-(t+1-1)} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{t+1} x_0.
\end{aligned}$$

Dette kaldes løsningen til differensligningen (2). Så hvis man har x_0, kan man nemt finde x_{t+1} for alle t.

Forslag:

- Simulér stien for forskellige 1. ordens differensligninger (dvs. for forskellige koefficienter a og b_t). Prøv fx for $(a, b_t) \in \{(\frac{1}{2}, 0), (1, 0), (2, 0)\}$ og find selv på flere. I kan fx benytte onlineværktøjet på `http://bit.ly/8XrWU1`[1]

- Forsøg at sige noget generelt om opførslen af differensligningen (1) baseret på værdien af koefficienterne a og b_t

- Udtryk x_{t+1} i (1) til kun at afhænge af x_0 og $t + 1$ for $b_t = b \neq 0$, altså hvor b er en konstant (et reelt tal) bortset fra 0

- Overvej om der er flere løsninger til (2) (og (1) generelt) – udover ved at bruge forskellige begyndelsesbetingelser

3.2 En multiplikator-accelerator model for økonomisk vækst

Lad Y_t betegne nationalindkomst, I_t de totale investeringer og S_t den totale opsparing – altsammen i periode t. Antag at opsparingen er proportional med nationalindkomsten og at investeringer er proportional med ændringer i indkomsten fra periode t til $t + 1$. Så har man, for $t = 0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} S_t &= \alpha Y_t \\ I_{t+1} &= \beta(Y_{t+1} - Y_t) \\ S_t &= I_t. \end{aligned}$$

Den sidste ligning ovenfor er en ligevægtsbetingelse, at opsparing er lig med investeringer i hver periode. α og β er positive konstanter, og man antager, at $\beta > \alpha > 0$.

Forslag:

- Find en differensligning, der bestemmer stien for Y_t givet initialindkomsten Y_0, og løs denne differensligning

- Simulér/tegn stien for forskellige værdier af α og β og forsøg at fortolke resultaterne

- Undersøg hvad værdien af α og β har af betydning for, hvordan differensligningen opfører sig; at undersøge kan både være at sige noget eksakt ved at lave matematiske argumenter samt at simulere og se på opførslen

3.3 Newtons metode

I har lært at finde rødder (eller nulpunkter) for funktioner, fx i andengradspolynomier $f(x) = ax^2 + bx + c$. Men hvordan mon man finder rødder i funktioner, hvor man ikke bare har en nem og simpel formel? Og hvad tror I der sker, når I får lommeregneren til at finde rødder?

En måde at finde rødder på er ved at gøre det symbolsk som fx formlen for rødderne i et andengradspolynomium. En anden måde at gøre det på, er at gøre det numerisk, dvs. man ikke (på nogen nem måde) kan finde en decideret formel for rødderne, men i stedet finder den numeriske værdi af rødderne.

[1] Genvej til `http://www.dean.usma.edu/math/research/mathtech/java/DDSSystemNH/ddssystempage.html`

Et eksempel på en numerisk metode til at finde rødder på, er Newtons metode (eller Newton-Raphsons metode – opkaldt efter Isaac Newton og Joseph Raphson), der stammer fra 1600-tallet.

Newtons metode kan udtrykkes ved differensligningen

$$x_{t+1} = x_t - \frac{f(x_t)}{f'(x_t)}, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

hvor f er den funktion, man gerne vil finde nulpunket for, og f' er den afledede af f.

Forslag:

- Hvilket mere præcist navn har (3)? Er den lineær? Hvilken orden?
- Hvorfor er det at finde nulpunkter interessant?
- Find kvadratroden af 1400 ved at lave 5 iterationer af (3) med forskellige startværdier. Forsøg at tegne alle iterationerne for mindst én af startværdierne. Tjek nøjagtigheden i forhold til lommeregnerens resultat. (Hint: Problemet svarer til at finde x for $x^2 = 1400$. Udtryk dette som en funktion, der skal findes nulpunkt for.)
- Nogle funktioner har mere end ét nulpunkt. Hvordan finder man mere end ét nulpunkt ved hjælp af Newtons metode?
- Kan Newtons metode fejle? I så fald: hvornår og hvorfor? (Hvilken betydning har startværdien x_0? Virker metoden for alle valg af f?)
- Undersøg nøjagtigheden af metoden.

3.4 Biologiske modeller

Torskebestanden i Nordsøen er forsøgt modelleret ved hjælp af tre forskellige første ordens differensligninger. Det er beskrevet i `http://bit.ly/9H2fC6`[2]. Forsøg at læse artiklen og analysere modellerne på samme måde som foreslået ved de andre modeller i dette oplæg. Artiklen er på engelsk, men I kan anvende `http://www.ordbogen.com` gratis fra universitetets netværk.

4 Materiale

I kan finde mere materiale på `http://bit.ly/cnFJtz`[3]. Her kan dette oplæg også findes i elektronisk udgave.

[2] Genvej til `http://www.nature.com/nature/journal/v385/n6616/pdf/385521a0.pdf`
[3] Genvej til `http://people.math.aau.dk/~fajstrup/UNDERVISNING/BASIS/2010/`