

Kortprojektioner L4 2019

1.mm Problemformulering

Lisbeth Fajstrup og Iver Ottosen

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

L4 april 2019

Kursusholdere

Lisbeth Fajstrup og Iver Ottosen

Institut for Matematiske Fag

Skjernvej 4a og Frederiks Kaj 10A

fajstrup@math.aau.dk, ottosen@math.aau.dk

<http://people.math.aau.dk/~fajstrup> <http://people.math.aau.dk/~ottosen>

Kursusoversigt

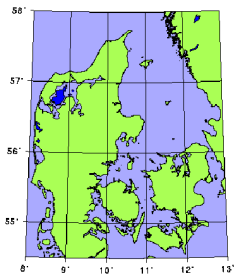
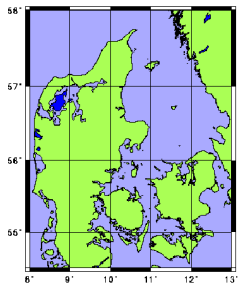
- 1.mm Problemformulering
- 2.mm Analytisk beskrivelse af egenskaber ved kort - første fundamentalform og forvanskninger.
- 3.mm Længde og vinkelmåling på flader. Konforme og arealtro kort.
- 4.mm Stereografisk projektion, Mercatorprojektion og Transversale Mercator projektioner, UTM, DKTM
- 5.mm Optimale projektioner. Afstandskorrektion.SYSTEM 1934 GI
- 6.mm : Referencesystemer. Datum. Koordinattransformation.

Arbejdsform

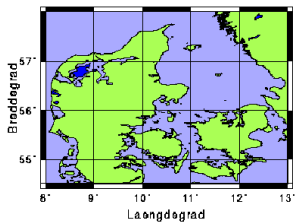
- Forelæsninger - to timer
- Øvelser: Opgaveregning
- Arbejd hjemme (eller i grupperne) med
 - ▶ Litteraturen
 - ▶ Repetitionsopgaver. Regnes før en kursusgang - gymnasiestof eller fra første studieår)
 - ▶ Tre større opgaver, som er *udgangspunkt for eksamen* (sammen med tre opgaver fra Svantes del af kurset.)
 - ▶ Øvelsesopgaver, I ikke nåede, eller regner forud.

1.mm Problemformulering

- Modellering af Jorden. Hvorfor og hvordan
- Egenskaber ved det ideelle kort: afstandstro, vinkeltro, arealtro mv.
- Forvanskninger er uundgåelige: sfærisk excess
- Projektioner og afbildninger på plan, kegle og cylinder
- Geografiske koordinater
- Planprojektioner: Ortografisk, gnomisk, stereografisk
- Cylinderprojektioner: Central, Lambert (Archimedes), Mercator



XYprojektion



Nye projektioner for Danmark.

KMS, 1. marts 2006: "Danmark skifter Koordinat og Højdesystem i 2006"

KMS, 18. febr. 2009: "Danmark har skiftet koordinat- og højdesystem
Nyeste status er, at 95 kommuner anvender det nye koordinatsystem, UTM/ETRS89, og 3 er igang med at lægge om. Det nye højdesystem, DVR90, anvendes nu af 96 kommuner og 1 kommuner er igang med at lægge om."

KMS, 2. marts 2009: "Forslag til nyt koordinatsystem DKTM/ETRS89 til bygge- og anlægsbranchen"

Nye projektioner

KMS 2.oktober 2009 Nyhedsbrev om DKTM/ETRS89

KMS har udsendt 1. nyhedsbrev om DKTM/ETRS89 om status for systemet efter høringsrunden i foråret 2009. Nyhedsbrevet er ledsaget af en kort introduktion for brugere af DKTM,

KMS 24. marts 2010 Ny version af KMSTrans og KMSTrLib

KMSTrans og KMSTrLib håndterer nu DKTM/ETRS89. Find de nye versioner her.

KMS 28. maj 2010 Flyer om DKTM (Dansk Transversal Mercator)

KMS maj 2011 : DKTM i MIA m.v.

KMS 2. februar 2012 Ny strategi for referencenet i Danmark

Geodatastyrelsen OG Styrelsen for Dataforsyning og Effektivisering.

Om kort: *Geodatastyrelsen (og sdfe) har ansvar for, at Danmark kortlægges, til brug for den offentlige forvaltning, virksomheder og borgeren. Geodatastyrelsen og kommunerne kortlægger landet i fællesskab.*

Kortlægningen sker i forskellige detaljeringsgrader og foregår digitalt. Kortdata opbevares i databaser, hvorfra der kan fremstilles datasamlinger og produkter efter behov. Udtrykket kort benyttes derfor ikke kun om papirkort, men også om datasamlinger, som ligger til grund for online kortvisninger og det almindelige papirkort.

Om Styrelsen for Dataforsyning og Effektivisering

Styrelsen for Dataforsyning og Effektivisering er ansvarlig for infrastrukturen for geografisk information, og har ansvaret for referencenettene, der er grundlag for opmåling og kortlægning i Danmark, Færøerne og Grønland. Desuden er styrelsen ansvarlig for landkortlægning i Danmark, Færøerne og Grønland, samt adresser, stednavne, Danmarks højdemodel og flere andre datasæt. Styrelsen understøtter desuden bl.a. Forsvaret med geodata både nationalt og internationalt. Styrelsen for Dataforsyning og Effektivisering repræsenterer Danmark i internationale geodata-samarbejder bl.a. i EU, FN (UN-GGIM), mm. og repræsenterer Danmark i det arktiske samarbejde (ASDI) under Arktisk Råd.

GeoDanmark

- GeoDanmark er et samarbejde mellem Styrelsen for Dataforsyning og Effektivisering (SDFE) og de 98 kommuner om at vedligeholde en kortlægning af by og landskab, som er præcis og aktuel.
- GeoDanmark-data er standardiserede på tværs af landet og GeoDanmark har besluttet, hvor præcise data skal være og hvor tit de skal opdateres ud fra de behov, der eksisterer i Danmark. *Som etablerings- og lagringssystem anvendes UTM zone 32/ETRS89 til plan registrering og DVR90 til højderegistrering. Udtræk kan foregå i andre koordinatsystemer.*

UTM zone 32 er en kortprojektion. ETRS89 er et datum.

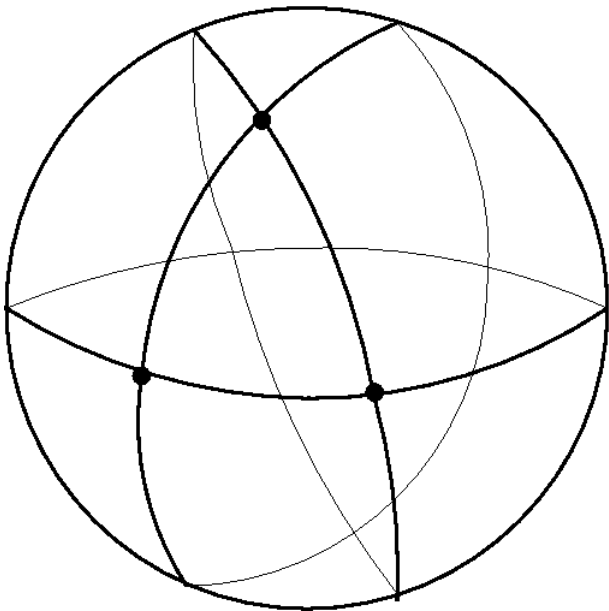
Dette kursus handler om **kortprojektioner og deres egenskaber**. Og (sidste kursusgang) om datum.

Storcirkler - kuglefladens linjer

En storcirkel er en kurve, der fremkommer ved skæring af kuglefladen med en plan gennem kuglefladens centrum.

- Ækvator er en storcirkel.
- Storcirkler er de største cirkler på kuglefladen.
- Den *korteste forbindelse mellem to punkter* på kuglefladen er langs en storcirkel.
- Gennem to antipodiske punkter, for eksempel Nord- og Sydpolen, går der uendeligt mange storcirkler.
- Gennem to punkter, der ikke er antipodiske, går der kun en storcirkel.

En sfærisk trekant.

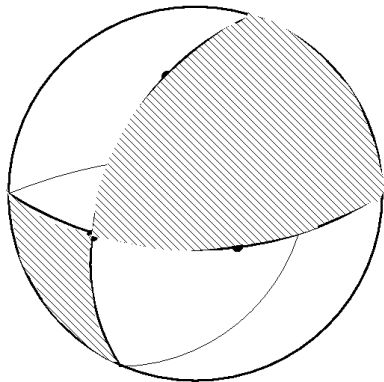


Faktum:

På en kugleflade med radius R , er vinkelsummen i en sfærisk trekant med areal A , givet ved

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + A/R^2$$

Argument for vinkelsumsformlen

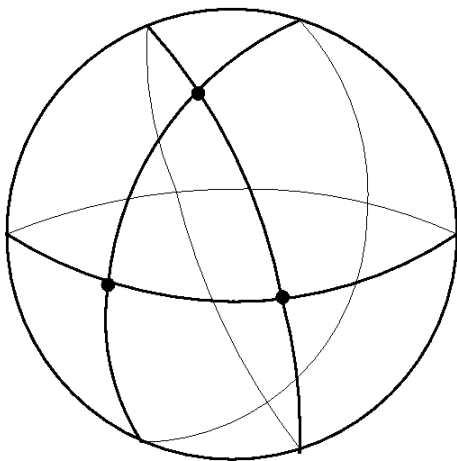


En dobbeltmåne mellem to storcirkler - kun forsiden er skraveret

Arealet af dobbeltmånen med vinkel α er

$$\frac{\alpha}{\pi} 4\pi R^2 = 4\alpha R^2$$

Argument for vinkelsumsformlen



Skraver alle tre måner.

Sætning:

Man kan ikke lave en 1:1 afbildning fra (et stykke af) kuglefladen til planen.

Argument:

- Hvis der er en 1:1 afbildning sender den stykker af storcirkler i liniestykker.
- Når afstande er bevaret, er vinkler bevaret.

Se nu på billedet af en trekant.

Trekanter på kuglen og i planen.

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A}{R^2}$$

OG

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

Det er en *modstrid*.

Det fundamentale problem

Sætning:

Der *findes ikke* noget kort, der har konstant målestok.

Sætning:

Der *findes ikke* noget kort, der bevarer både vinkler og areal.

Den gode nyhed

Der findes kort, der bevarer vinkler

Der findes kort, der bevarer areal.

Der findes kort, der sender storcirkler i storcirkler (men så bevarer det ikke vinkler)

Forvanskninger

- Vinkler.
- Arealer.
- Afstande.

Et kort, der bevarer vinkler (er *konformt*) *forvansker* - ikke alle storcirkler afbildes i linjer!

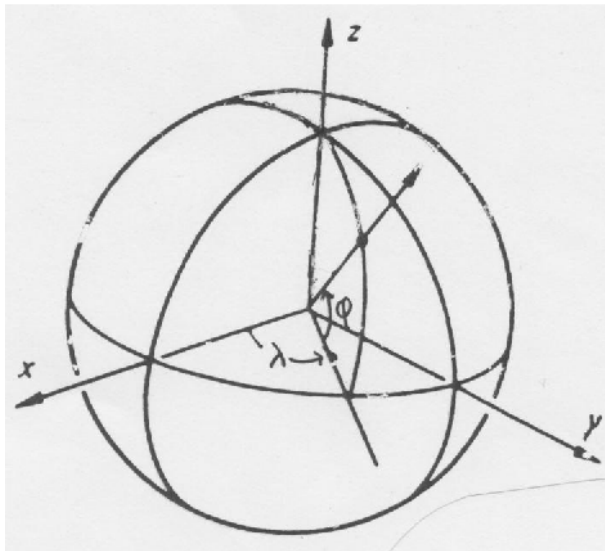
Trekanter på kuglen afbildes ikke til trekanter i kortet.

Men det er der ikke noget at gøre ved!!!

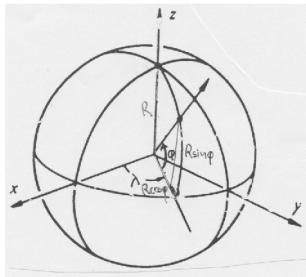
Udregning af forvanskninger

- **Analytisk tilgang til projektioner**
- Idag med kendt matematik.
- Ny matematik næste gang.

Geografiske Koordinater



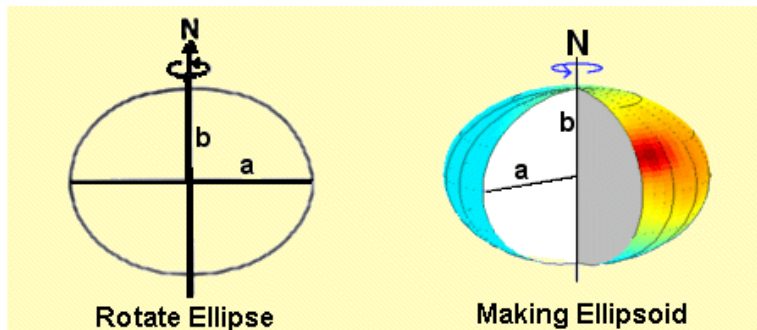
Fra geografiske til cartesiske koordinater



$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos(\varphi) \cos(\lambda) \\ R \cos(\varphi) \sin \lambda \\ R \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

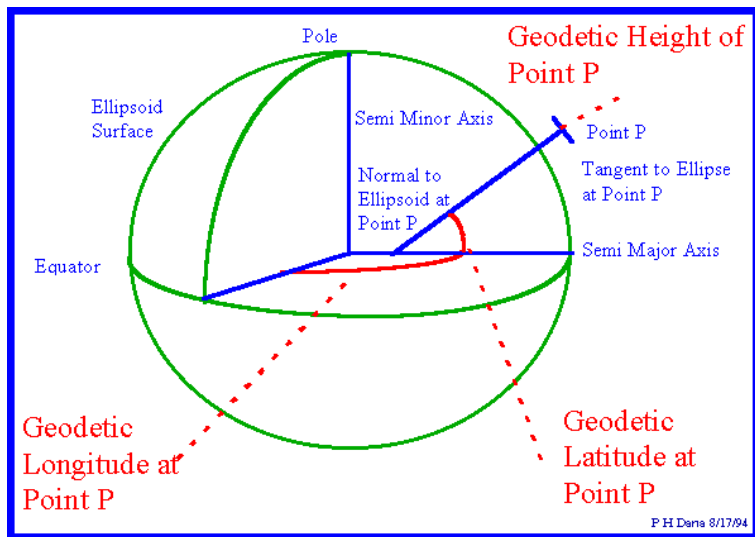
Udregninger i en opgave.

Omdrejningsellipsoider



Omdrejningsellipsoide med halvakser a og b

Omdrejningsellipsoider



Breddegrader på ellipsoider

Omdrejningsellipsoider

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N \cdot \cos \varphi \cos \lambda \\ N \cdot \cos \varphi \sin \lambda \\ N \cdot (1 - e^2) \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Hvor

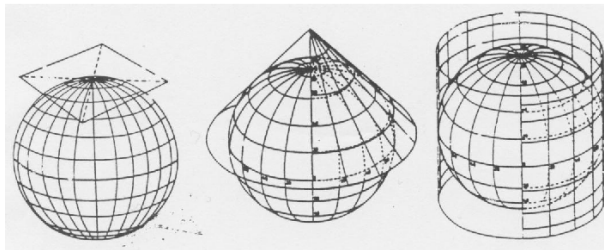
$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

er *excentriciteten*
og

$$N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

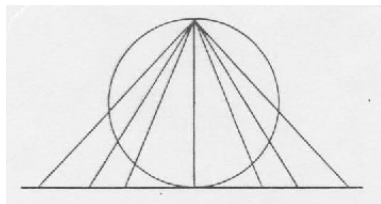
er *krumningsradius* i punktet.

Projektionsflader

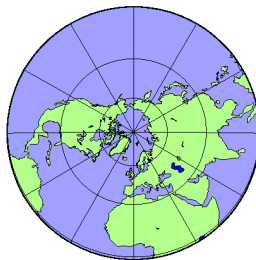


Stereografisk projektion

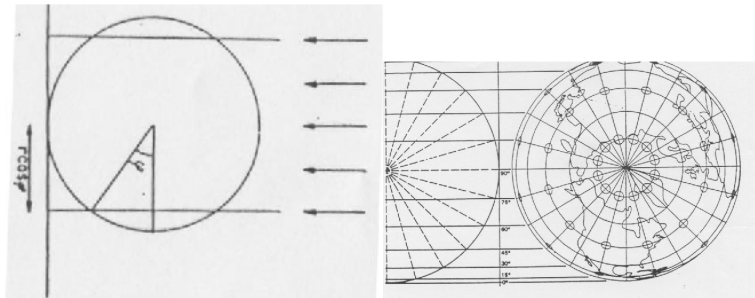
Stereografisk projektion.



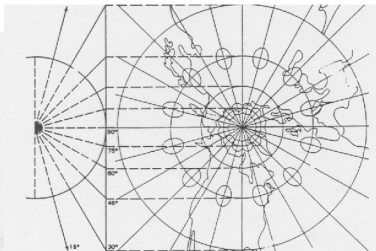
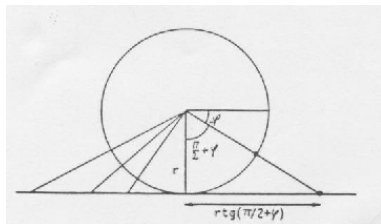
Den regner I på til øvelserne



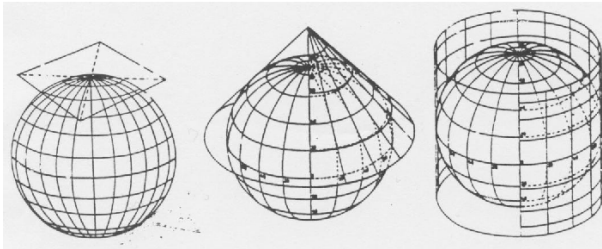
Ortografisk planprojektion



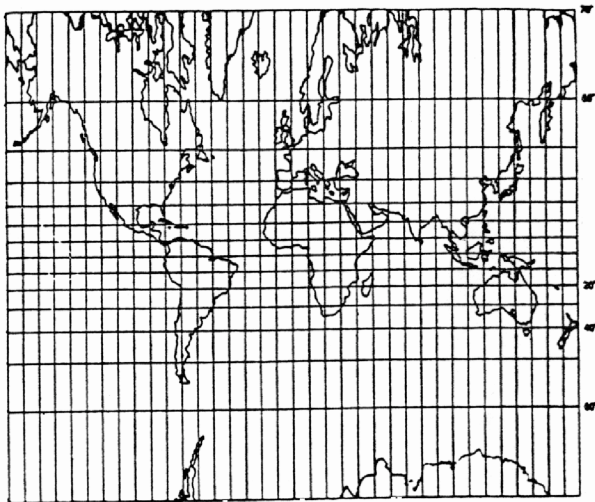
Gnomisk planprojektion



Cylinderprojektionen

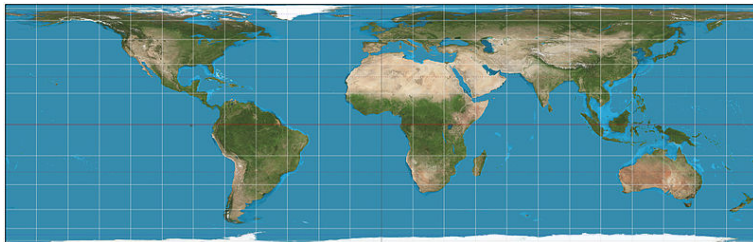


Centralcyklindrisk projektion



$$(\lambda, \varphi) \rightarrow (\lambda, \tan(\varphi))$$

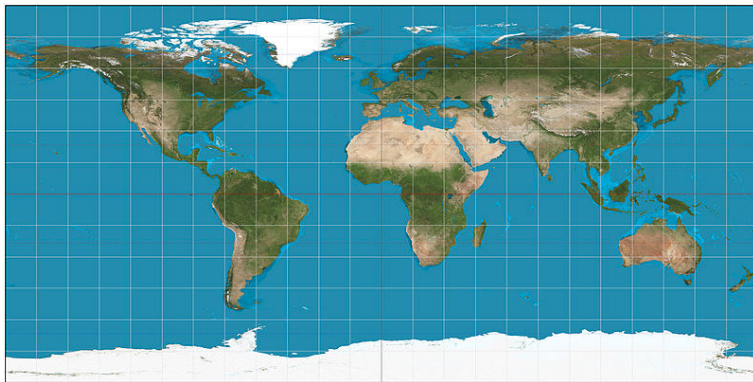
Archimedes' arealtro - ortografisk - Lambert



(By Strebe (Own work) [CC-BY-SA-3.0 (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0>)], via Wikimedia Commons)

$$(\lambda, \varphi) \rightarrow (\lambda, \sin(\varphi))$$

Equirektangulær



(By Strebe (Own work) [CC-BY-SA-3.0 (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0>)], via Wikimedia Commons)

$$(\lambda, \varphi) \rightarrow (\lambda, \varphi)$$

Mercatorprojektion



(By Strebe (Own work) [CC-BY-SA-3.0 (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0>)], via Wikimedia Commons)

$$(\lambda, \varphi) \rightarrow (\lambda, \ln(\tan(\pi/4 + \varphi/2)))$$

Forvanskninger

- Hvilke projektioner bevarer vinkler?
- Hvilke projektioner bevarer arealer?
- Hvad er målforholdet?
- Hvordan *konstruerer* man projektioner med givne egenskaber?

Det kræver ny matematik - mere næste gang.