

Generelt om kurset:

Kurset består af flere elementer:

- Forelæsninger - to timer,
- Øvelser: Opgaveregning.
- Arbejde hjemme med
 - Litteraturen
 - Repetitionsopgaver - matematik fra gymnasiet eller første studieår, som skal bruges her.
 - Tre større opgaver, som er udgangspunkt for eksamen
 - Øvelsesopgaver, I ikke nåede eller regner forud.

De enkelte kursusgange afholdes alle efter samme overordnede model: Først forelæsning, så opgaveregning. Modellen er altså

- om formiddagen i hvert fald. Ellers er den parallelforskudt:

- 8:15-ca. 10:15 - forelæsning. (med en pause midt i selvfølgelig.)
- ca.10:15-12:00 Opgaveregning.

Lisbeth har skrevet noter til kurset, "Kortprojektioner og Forvanskninger". De ligger på kursussiden under Litteratur.

Om repetitionsopgaverne: Ideen med dem er, at I får genopfrisket den matematik, der skal bruges i de længere øvelsesopgaver. Lav dem helst hjemme, men kan man ikke regne dem, kan man naturligvis få hjælp.

Ugesedler, noter og lignende findes på [www](http://people.math.aau.dk/~fajstrup/UNDERVISNING/KORTPROJEKTIONER/) under adressen

<http://people.math.aau.dk/~fajstrup/UNDERVISNING/KORTPROJEKTIONER/>

Problemformulering:

- Modeller af Jorden. Hvorfor og hvordan.
- Nye projektioner for Danmark - ikke teoretisk mulighed, men praksis.
KMS 18.februar 2009 "Danmark har skiftet koordinat- og højdesystem."
KMS, 2. marts 2009: "Forslag til nyt koordinatsystem DKTM/ETRS89 til bygge- og anlægsbranchen"
KMS, 24. marts 2010 Ny version af KMSTrans og KMSTrLib
KMSTrans og KMSTrLib håndterer nu DKTM/ETRS89.

28. maj 2010 : "Flyer om DKTM (Dansk Transversal Mercator)"

2. februar 2012: KMS har netop færdiggjort strategien for referencenet i Danmark,
2013 KMS bliver til GST, Geodatastyrelsen og SDFE, Styrelsen for Dataforsyning og Effektivitet.

"Geodatastyrelsen har ansvar for, at Danmark kortlægges, til brug for den offentlige forvaltning, virksomheder og borgeren. Geodatastyrelsen og kommunerne kortlægger landet i fællesskab, i FOT-samarbejdet.

Kortlægningen sker i forskellige detaljeringsgrader og foregår digi-

talt. Kortdata opbevares i databaser, hvorfra der kan fremstilles datasamlinger og produkter efter behov. *Udtrykket kort benyttes derfor ikke kun om papirkort, men også om datasamlinger, som ligger til grund for online kortvisninger og det almindelige papirkort.*

30. januar 2015. Grønland får nye kort. "De nuværende kort over Grønland er fra en anden tid. De er ikke særligt nøjagtige og kan ikke bruges sammen med GPS."

GST pressemeddelelser: Fokus på 3D hydrologisk højdemodel og "frie data."

GST 5.november 2015: Topografisk Atlas over Danmark med 3d-effekt. Skala 1:75000. Kortprojektion - ?? Formentlig UTM.

GST 3. Januar 2016. Geodatastyrelsen deles i to: Geodatastyrelsen og Styrelsen for Dataforsyning og Effektivisering.(SDFE)

SDFE 7.marts 2016: Ny kortlægning i Grønland. "Pilotprojektet skal bl.a. etablere, afprøve og dokumentere nye metoder til kortlægning, indsamling af satellitbilleder, produktion af geodata, kartografisk visualisering mv."

GST 7.september 2016 Redegørelse om infrastruktur for geografisk information. To styrelser, Nye søkort

for Grønland, SDFE 21 marts 2017 Stor stigning i værdien af de frie geografiske grunddata. ..."Eksempler på de frisatte data er Danmarks Højdemodel, Danske Stednavne, Danmarks Administrative Geografiske Inddelinger, Danmarks Topografiske Kortværk, GeoDanmark data (data om veje vandløb, bygninger mv.), Ortofoto (flyfotos som er rettet op så de har samme størrelsesforhold overalt og som kan bruges til kontrol for produktion af kort eller til udpegning af rettelser i forbindelse med ajourføring) mm."

Dette kursus: Kort = repræsentation af *data* i en plan - 2D.

- Kortegenskaber: afstandstro, vinkeltro, arealtro mv.
- Forvanskninger er uundgåelige: sfærisk exces
- Projektioner og afbildninger på plan, kegle og cylinder
- Geografiske koordinater
- Planprojektioner: Ortografisk, gnomisk, stereografisk
- Cylinderprojektioner: Ortografisk, Lambert, Mercator.

Litteratur:

- Kortprojektioner og forvanskninger. Kapitel 3, 4 og 5. Kan hentes på kursushjemmesiden. (se under Litteratur)
- Landmåling i Teori og Praksis, 3. udgave, Karsten Jensen. I Appendix 5 og 6 - I skal ikke forvente at forstå det nu, men det kan I, når kurset er færdigt.
- Diverse noter fra GST og SDFEs hjemmeside. (Find links på kursussiden under Litteratur) Det er GST/SDFEs nyeste vejledninger om kortprojektioner m.v. Dem kan I formentlig ikke læse nu, men det er et af målene med kurset, at I kan det bagefter - for det forventer GST/SDFE jo, at praktiserende landinspektører kan.
- "Det danske kvadratnet" - Danmarks Statistik og GST. Tænk over, hvad der skal til for at opdele landet på den måde. Hvad er et kvadrat på den runde Jord? Svar: Man bruger koordinater fra UTM/EUREF89 Zone 32.

"Hjemmeopgaver":

man "måle" vinklens størrelse i radianer? Hvor måler man $\tan(v)$

1. Omregn følgende vinkler, som er givet i grader, til radianer: $\theta_1 = 30^\circ$, $\theta_2 = 180^\circ$, $\theta_3 = 90^\circ$, $\theta_4 = 110^\circ$
(Facit: $\theta_1 = \pi/6$, $\theta_2 = \pi$, $\theta_3 = \pi/2$ og $\theta_4 = 1,920$)
2. Tegn en cirkel med radius 1 og centrum i $(0,0)$ i et koordinatsystem. Indtegn en linie, som danner en vinkel v på ca. 30° med x-aksen. Marker de liniestykker, der har længde $\cos(v)$ og $\sin(v)$.
3. Brug tegningen fra før. Hvor kan
4. Cotangens optræder i litteratur om projektioner. Den er defineret: $\cot(v) = \frac{\cos(v)}{\sin(v)}$. Hvor kan man aflæse denne størrelse?
5. Find en parameterfremstilling for linjen l i $\mathbb{R}^3$ gennem punkterne $(1,2,3)$ og $(3,7,4)$.
6. Findes der flere parameterfremstillinger for den samme linie?
7. Find koordinaterne til skæringspunktet mellem linien l fra opgave 1, og $x - y$ -planen.

Opgaver:

1. Her er et andet argument for, at man ikke kan undgå forvanskninger ved afbildninger fra en kugle til en plan: På en kugle med radius R ser vi på "den sfæriske cirkel med sfærisk radius r " og centrum i kuglens nordpol. Den sfæriske radius er den afstand, man måler langs kuglens overflade - se tegningen.

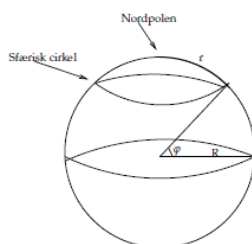


Figure 1: En sfærisk cirkel - og nej, tegningen er ikke ret god...

Denne cirkel er en *breddecirkel* (alle punkter på cirklen har samme breddevinkel/breddegrad φ). Vis, at denne breddecirkel har radius $R \cdot \sin \frac{r}{R}$ og en omkreds på $2\pi \cdot R \cdot \sin \frac{r}{R}$ (VINK: r måler buestykket svarende til vinklen $\pi/2 - \varphi$ i en cirkel med radius R . Så breddevinklen φ er $\pi/2 - \frac{r}{R}$ (målt i radianer).)

Derimod har en plan cirkel med radius r jo en omkreds på $2\pi \cdot r$.

Hvorfor følger det nu, at der ikke findes en afbildning med konstant målforhold? Beregn forskellen mellem omkreds af cirklen med radius r på kuglen og i planen (procentisk afvigelse) for hhv. $r = 0.5R, 0.1R, 0.01R$.

- Den stereografiske planprojektion fremkommer ved at trække en linje fra Sydpolen gennem det punkt på kuglefladen, man ønsker at afbilde. Det afbildes i skæringspunktet mellem linjen og en plan, som er tangent til Nordpolen. En modificeret version af denne projektion bruges som UPS-system som supplement til UTM i Arktis og Antarktis. Diskuter vha. skitsen fordele og ulemper af denne projektion. Hvordan kan man lave om på projektionen, så den giver gode resultater på vore breddegrader?
- En analytisk beskrivelse for den stereografiske projektion: Vi anbringer kuglen med radius 1 i et koordinatsystem, sådan at Nordpolen får koordinaterne $N = (0, 0, 1)$ og sydpolen $S = (0, 0, -1)$. Vis, at et punkt med geografiske koordinater (λ, φ) projiceres på et punkt med plane koordinater

$$(u, v) = \left(2 \cdot \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \cdot \cos \lambda, 2 \cdot \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \cdot \sin \lambda \right).$$

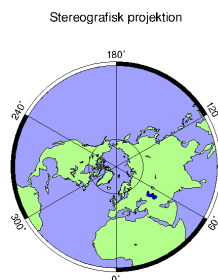


Figure 2: Kort med den stereografiske azimutalprojektion.

Vink: Det gælder om at finde skæringspunktet mellem en plan P og en linje l . P er den plan, som er parallel med x - y -planen og går igennem Nordpolen, og l er linjen gennem Sydpolen og punktet $(\cos \varphi \cos \lambda, \cos \varphi \sin \lambda, \sin \varphi)$. For at finde skæringspunktet, kan man f.eks. skrive parameterfremstillingen for linjen op, og finde den værdi af parameteren, hvor $z = 1$.

Beregn længden (omkredsen) af en *breddecirkel* B_φ med breddevinkel φ . Beregn derefter længden af billedet (i kortet) af denne breddecirkel ved stereografisk projektion.

Vink: Billedet af breddecirklen B_φ er en cirkel (overvej det). Find radius af B_φ og af billedet af B_φ og find så omkredsen af de to cirkler.

Hvad siger det om målestoksforholdet?¹

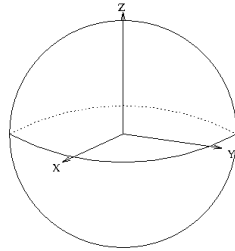
4. Danmark ligger omkring punktet Q med geografiske koordinater $(\lambda, \varphi) = (10^\circ, 56^\circ)$.
Hvad er de kartesiske $((X, Y, Z))$ koordinater til det punkt?
Hvilket punkt skal man projicere fra, hvis man vil lave stereografisk projektion på planen gennem Q ?
Hvad er ligningen for den plan, man skal projicere på?
5. Hvad er geografiske koordinater (længde og breddegrader) egentlig: Indtegn et punkt på kuglefladen på figur 2 og indtegn de vinkler, der er længde- og breddegraderne til punktet.

¹(Bonusoplysning: Formlen for projektionen kan vha. trigonometriske formler omregnes til

$$(u, v) = (2 \cdot \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}) \cdot \cos \lambda, 2 \cdot \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}) \cdot \sin \lambda).$$

I skal ikke lave omregningen!! Men det er godt at vide, hvis man skulle støde ind i den formel et sted.)

Hvad er Z-koordinaten til et punkt med geografiske koordinater (λ, φ) ? Hvad er X og Y koordinaterne?



Facit til opgaverne:

1. 4.3% , 0.17% , $1.7 \times 10^{-3}\%$
2. Længden af B_φ er $2\pi \cos \varphi$. Projektionen af B_φ har længde $\frac{4\pi \cos \varphi}{1+\sin \varphi}$. Målestoksforholdet langs B_φ er altså $\frac{2}{1+\sin \varphi}$
3. $Q = (0, 550698, 0, 097103, 0, 829038)$. Man projicerer fra punktet $-Q$ på planen med ligning $0, 550698x + 0, 097103y + 0, 829038z = 1$
4. $(X, Y, Z) = (R \cos(\varphi) \cos(\lambda), R \cos(\varphi) \sin(\lambda), R \sin(\varphi))$.

Næste gang: Kortprojektioner, kapitel 6 . Første fundamentalform og målforhold.

Venlig hilsen
Iver Ottosen og
Lisbeth Fajstrup