

Kortprojektioner L4 2019

2.mmm Analytisk beskrivelse af egenskaber ved kort Første fundamentalform og forvanskninger.

Lisbeth Fajstrup og Iver Ottosen

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

L4 April 2019

Sidste gang:

Sætning:

Der *findes ikke* noget kort, der har konstant målestok.

Sætning:

Der *findes ikke* noget kort, der bevarer både vinkler og areal.

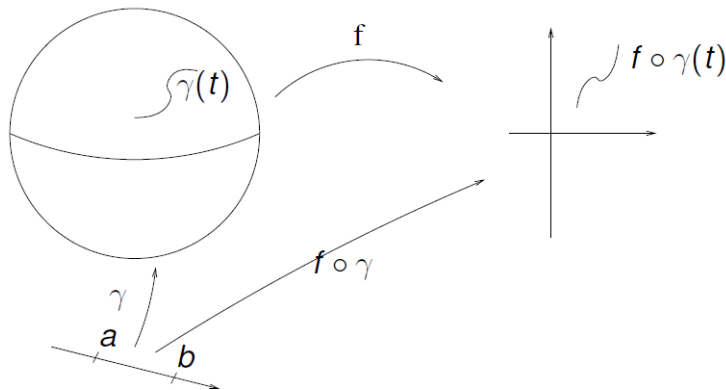
Den gode nyhed

Der findes kort, der bevarer vinkler

Der findes kort, der bevarer areal.

Der findes kort, der sender storcirkler i storcirkler (men så bevarer det ikke vinkler)

Hvad er målforhold??



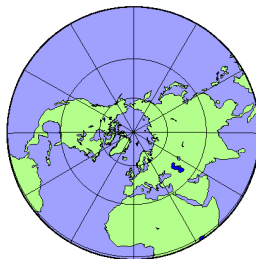
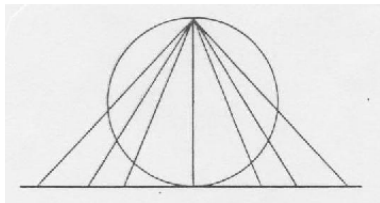
Målforhold
 $m(\gamma) = \int \frac{s}{s} dt$. $P = \gamma(0)$, $m(P, \gamma) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{s(t)}{s'(t)}$ Idag: Målforhold afhænger af punktet P og retningen, $\gamma'(t)$

Muligt at *regne* på projektioner:

Planprojektioner $(\lambda, \varphi) \rightarrow r(\varphi)(\cos \lambda, \sin \lambda)$

Stereografisk projektion

Stereografisk projektion.



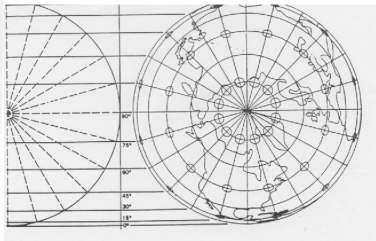
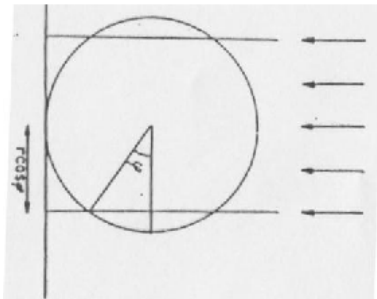
$$r(\varphi) = \frac{2 \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}$$

Opgaver sidst: Længden af en breddecirkel før projektion $2\pi \cos \varphi$.

Efter stereografisk projektion: $2\pi \frac{2 \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}$

$$m(B_\varphi) = \frac{2}{1 + \sin \varphi}$$

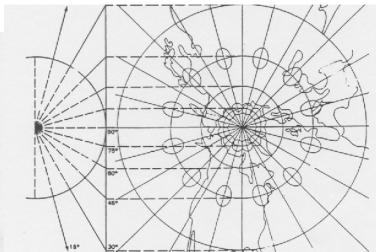
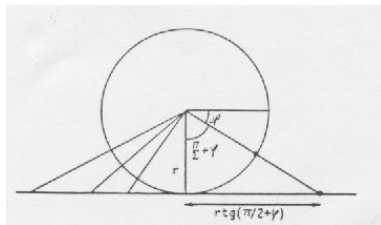
Ortografisk planprojektion



$$r(\varphi) = \cos \varphi$$

$$m(B_{\varphi}) = 1$$

Gnomisk planprojektion



$$r(\varphi) = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$$

$$m(B_\varphi) = \frac{1}{\sin \varphi}$$

Sidste gang i opgaver

- Radius i en breddecirkel på kuglen med radius R er $R \cos \varphi$, hvor φ er breddevinklen.
- Målforshold *langs en breddecirkel* for stereografisk projektion

$$m(B_\varphi) = \frac{2}{1 + \sin \varphi}$$

$m(B_{\pi/2}) = 1$. Ellers $m(B_\varphi) > 1$

- Generelt for planprojektioner $(\lambda, \varphi) \rightarrow r(\varphi)(\cos \lambda, \sin \lambda)$

$$m(B_\varphi) = \frac{r(\varphi)}{\cos \varphi}$$

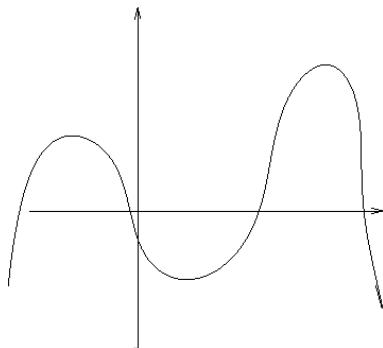
Spørgsmål

- Hvordan *beregnes* målforholdet i et punkt og i en given retning?
- Hvordan afgør man, om en given projektion er vinkeltro(konform), arealtro,...?
- Hvordan *konstruerer* man afbildninger, der er vinkeltro, arealtro,...?
- Hvordan sørger man for, at målforholdet ikke afviger for meget fra 1 på et givet område? *Nøjagtighedskrav*

Redskaber:

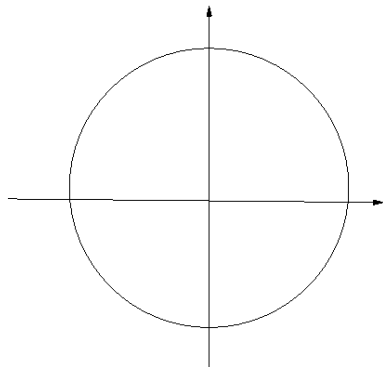
- Kurvelængde.
- Vinkler mellem kurver (næste gang)
- Arealberegning (næste gang)
- Differentiation og kædereglen.

Kurver - analytisk beskrivelse



Grafer $(x, f(x))$.

Kurver - analytisk beskrivelse



Hvad med cirklen? - Ikke en graf...

Hvad med kurver i 3D?

Parameterfremstillinger for kurver

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$$

Eks.

- $\alpha(t) = (R \cos(t), R \sin(t))$ cirkel
- $\beta(t) = \vec{OP} + t\vec{v}$ linje
- $\gamma(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$ ellipse
(ligning $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$)
- $\mu(t) = (r \cos(t), r \sin(t), at)$ skruelinje

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$$

har hastighedsvektor (tangentvektor)

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \gamma'_3(t))$$

Fart:

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{\gamma'_1(t)^2 + \gamma'_2(t)^2 + \gamma'_3(t)^2}$$

En parametrisering er et *valg* af gennemløbsfart:

$$\alpha(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$$

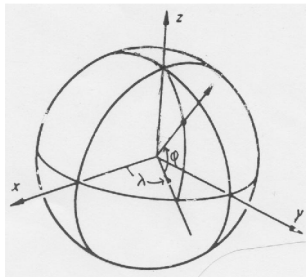
$$|\alpha'(t)| = 2$$

$$\beta(s) = (\cos(s^3), \sin(s^3))$$

samme billedkurve - med passende valg af interval for t og s

$$|\beta'(s)| =$$

Kurver på kuglefladen - via geografiske koordinater



$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos(\varphi) \cos(\lambda) \\ R \cos(\varphi) \sin(\lambda) \\ R \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Eksempel: $\gamma(t) = \begin{pmatrix} R \cos(2t) \cos(t^2) \\ R \cos(2t) \sin(t^2) \\ R \sin(2t) \end{pmatrix}$

Kurver på kuglefladen

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos(\varphi) \cos(\lambda) \\ R \cos(\varphi) \sin(\lambda) \\ R \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

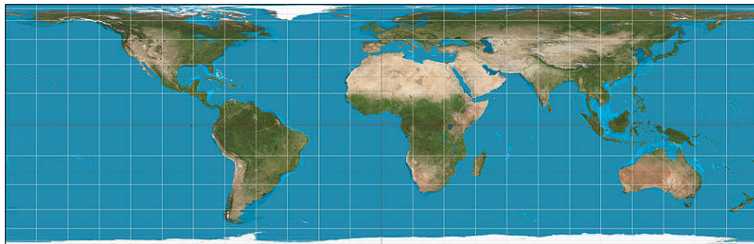
$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} R \cos(\varphi(t)) \cos(\lambda(t)) \\ R \cos(\varphi(t)) \sin(\lambda(t)) \\ R \sin(\varphi(t)) \end{pmatrix}$$

Længden af et kurvestykke. Fra $\gamma(t_0)$ til $\gamma(t_1)$

$$s = \int_{t_0}^{t_1} |\gamma'(t)| dt$$

Ofte vanskeligt at regne ud - ikke pæne stamfunktioner. Eks. buestykker i ellipser.

Målforhold

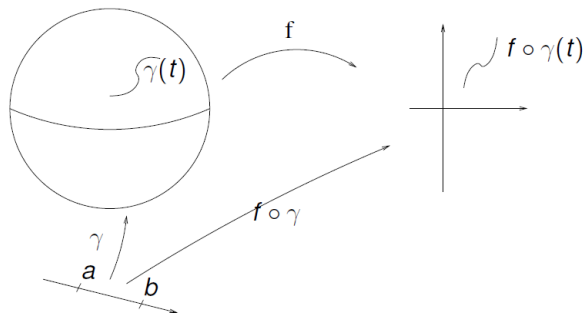


Archimedes' arealtro cylinderprojektion

Målforhold langs længdegrader afhænger af ϕ .

Der "strækkes" langs breddecirkler og "krympes" langs meridianerne.

Målforld



$$\frac{\int_a^b |(f \circ \gamma)'(s)| ds}{\int_a^b |\gamma'(s)| ds}$$

$$m(P, \gamma) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\int_{t_0}^t |(f \circ \gamma)'(s)| ds}{\int_{t_0}^t |\gamma'(s)| ds}$$

$$m(\gamma) = \frac{s}{S} =$$

Målforhold

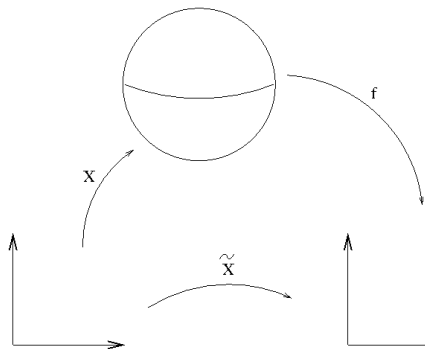
$$m(P, \gamma) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\int_{t_0}^t |(f \circ \gamma)'(s)| ds}{\int_{t_0}^t |\gamma'(s)| ds}$$

L'Hospitals regel (tænk på Taylorudvikling af tæller og nævner)

$$= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t |(f \circ \gamma)'(s)| ds}{\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t |\gamma'(s)| ds} = \frac{|(f \circ \gamma)'(t_0)|}{|\gamma'(t_0)|} = \frac{|Df(\gamma(t_0))\gamma'(t_0)|}{|\gamma'(t_0)|}$$

Altså $m(P, \gamma'(t_0))$ - målforhold afhænger af punkt(sted) og retning.

Beregning af forvanskninger PRINCIP



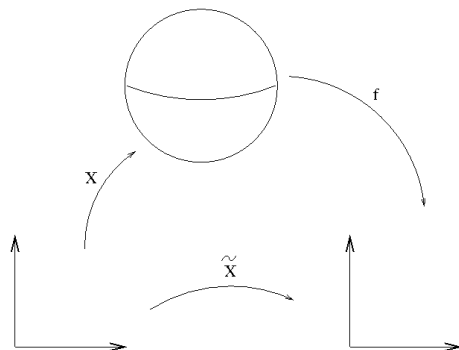
Forvanskninger ved f er $\frac{\text{Forvanskning ved } \tilde{x}}{\text{Forvanskning ved } x}$

$X(\lambda, \varphi)$ koordinater på kuglen/ellipsoiden. $\tilde{X}(\lambda, \varphi)$ er kortet.

Ønskes: Systematisk beregning - samme slags udregninger for X som for $\tilde{X}$.

BEREGNING af forvanskninger ved afbildning fra (λ, φ) -planen til kuglen/ellipsoiden/et kort/...

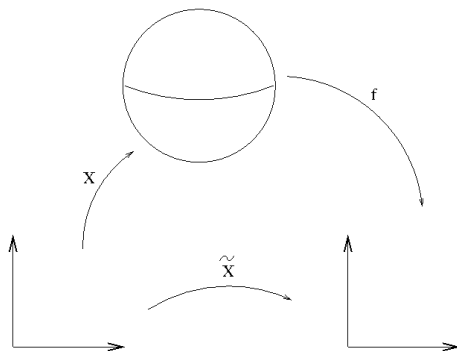
Eksempel



$$X(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos(\varphi) \cos(\lambda) \\ R \cos(\varphi) \sin \lambda \\ R \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{X}(\lambda, \varphi) = \frac{2 \cos \varphi}{1 + \sin \varphi} (\cos \lambda, \sin \lambda)$$

Principskitse

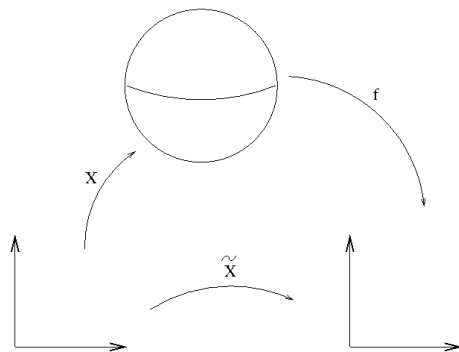


Kurver i (λ, φ) -planen $\leftrightarrow$ kurver på kuglen/ellipsoiden/i kortet. Via X og $\tilde{X}$. Kurver har formen $X(\lambda(t), \varphi(t))$ (eller $\tilde{X}(\lambda(t), \varphi(t))$)

Eksempler

- $X(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix} R \cos(\varphi) \cos(\lambda) \\ R \cos(\varphi) \sin \lambda \\ R \sin(\varphi) \end{pmatrix}$
- $(\lambda(t), \varphi(t)) = (\lambda_0, t)$
 $X(\lambda_0, t)$ er en *parameterkurve*
- $(\lambda(s), \varphi(s)) = (s, \varphi_0)$
 $X(s, \varphi_0)$ er en *parameterkurve*
- $\tilde{X}(\lambda, \varphi) = (\lambda, \ln(\tan(\pi/4 + \varphi/2)))$ (Mercator projektionen)

Krummede koordinater



Systematisering af beregningerne

$$\gamma(t) = \mathbf{X}(\lambda(t), \varphi(t))$$

Ønskes: Beregning af $\gamma'(t)$ og $|\gamma'(t)|$ - til brug i vinkel- og længde og målforholdsberegninger.

Værktøj: Kædereglene...

$$\gamma'(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t) = \mathbf{X}_\lambda(\lambda(t), \varphi(t))\lambda'(t) + \mathbf{X}_\varphi(\lambda(t), \varphi(t))\varphi'(t)$$

$$\begin{aligned}
|\gamma'(t)|^2 &= \gamma'(t) \cdot \gamma'(t) = \\
&(\mathbf{X}_\lambda(\lambda(t), \varphi(t))\lambda'(t) + \mathbf{X}_\varphi(\lambda(t), \varphi(t))\varphi'(t)) \cdot \\
&(\mathbf{X}_\lambda(\lambda(t), \varphi(t))\lambda'(t) + \mathbf{X}_\varphi(\lambda(t), \varphi(t))\varphi'(t)) = \\
&\mathbf{X}_\lambda(\lambda(t), \varphi(t)) \cdot \mathbf{X}_\lambda(\lambda(t), \varphi(t))(\lambda'(t))^2 + \\
&2\mathbf{X}_\lambda(\lambda(t), \varphi(t)) \cdot \mathbf{X}_\varphi(\lambda(t), \varphi(t))\lambda'(t)\varphi'(t) \\
&+ \mathbf{X}_\varphi(\lambda(t), \varphi(t)) \cdot \mathbf{X}_\varphi(\lambda(t), \varphi(t))(\varphi'(t))^2
\end{aligned}$$

Kortere - med indmaden i funktionerne underforstået

$$|\gamma'(t)|^2 = (\mathbf{X}_\lambda \cdot \mathbf{X}_\lambda)(\lambda'(t))^2 + 2(\mathbf{X}_\lambda \cdot \mathbf{X}_\varphi)\lambda'(t)\varphi'(t) + (\mathbf{X}_\varphi \cdot \mathbf{X}_\varphi)(\varphi'(t))^2$$

Notation: $E(\lambda, \varphi) = \mathbf{X}_\lambda \cdot \mathbf{X}_\lambda$, $F(\lambda, \varphi) = \mathbf{X}_\lambda \cdot \mathbf{X}_\varphi$, $G(\lambda, \varphi) = \mathbf{X}_\varphi \cdot \mathbf{X}_\varphi$

$$|\gamma'(t)|^2 =$$

$$E(\lambda(t), \varphi(t))(\lambda'(t))^2 + 2F(\lambda(t), \varphi(t))\lambda'(t)\varphi'(t) + G(\lambda(t), \varphi(t))(\varphi'(t))^2$$

Første fundamentalform

$$(ds)^2 = E(d\lambda)^2 + 2Fd\lambda d\varphi + G(d\varphi)^2$$

Den deformerede Pythagoras.

Første fundamentalform for kuglefladen

$$\mathbf{X}(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \cos \lambda \\ R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_\lambda(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_\varphi(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix}$$

Første fundamentalform for kuglefladen

$$\mathbf{X}(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \cos \lambda \\ R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_\lambda(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix} -R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_\varphi(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Første fundamentalform for kuglefladen

$$E(\lambda, \varphi) = \mathbf{X}_\lambda \cdot \mathbf{X}_\lambda = \begin{pmatrix} -R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Første fundamentalform for kuglefladen

$$F(\lambda, \varphi) = \mathbf{X}_\lambda \cdot \mathbf{X}_\varphi = \begin{pmatrix} -R \cos \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix} =$$

Første fundamentalform for kuglefladen

$$G(\lambda, \varphi) = \mathbf{X}_\varphi \cdot \mathbf{X}_\varphi = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \lambda \\ -R \sin \varphi \sin \lambda \\ R \cos \varphi \end{pmatrix} =$$

Første fundamentalform for kuglefladen

$$E(\lambda, \varphi) = R^2 \cos^2(\varphi), \quad F(\lambda, \varphi) = 0, \quad G(\lambda, \varphi) = R^2$$

Første fundamentalform for ellipsoiden

$$X(\lambda, \varphi) = \begin{pmatrix} N \cdot \cos \varphi \cos \lambda \\ N \cdot \cos \varphi \sin \lambda \\ N \cdot (1 - e^2) \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$E = N^2 \cos^2 \varphi$$

$$F = 0$$

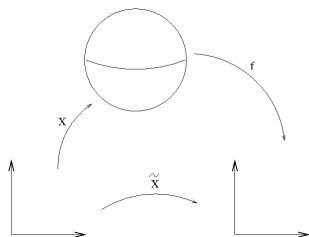
$$G = M^2$$

Hvor

$$N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$M = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

Målførhold og første fundamentalform



$$m(P, \gamma'(t_0)) = \frac{|(f \circ \gamma)'(t_0)|}{|\gamma'(t_0)|} =$$

$$\frac{\left| \frac{d}{dt}(\tilde{\mathbf{X}}(\lambda(t), \varphi(t)))(t_0) \right|}{\left| \frac{d}{dt}(\mathbf{X}(\lambda(t), \varphi(t)))(t_0) \right|}$$

$$m((\lambda, \varphi), \gamma')^2 = \frac{\tilde{E}(\lambda')^2 + 2\tilde{F}\lambda'\varphi' + \tilde{G}(\varphi')^2}{E(\lambda')^2 + 2F\lambda'\varphi' + G(\varphi')^2}$$

Udregning af målforhold

- Udregn *koefficienterne* til første fundamentalform for kuglen/ellipsoiden , E, F og G
- Udregn *koefficienterne* til første fundamentalform for kortet, $\tilde{E}, \tilde{F}$ og $\tilde{G}$
- Målforholdet i retning efter kurven givet ved $(\lambda(t), \varphi(t))$ fås af

$$m((\lambda, \varphi), \gamma')^2 = \frac{\tilde{E}(\lambda')^2 + 2\tilde{F}\lambda'\varphi' + \tilde{G}(\varphi')^2}{E(\lambda')^2 + 2F\lambda'\varphi' + G(\varphi')^2}$$

Målforhold og retning

Sætning

Målforholdet afhænger kun af punktet (λ, φ) og *tangentretningen*

$$\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

En retning er givet ved en vinkel: $(\lambda', \varphi') = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ - f.eks. givet ved en linje i (λ, φ) -planen $(\lambda(t), \varphi(t)) = (\lambda_0 + t \cos \alpha, \varphi_0 + t \sin \alpha)$

$$m(P, \alpha)^2 = \frac{\tilde{E} \cos^2 \alpha + 2\tilde{F} \cos \alpha \sin \alpha + \tilde{G} \sin^2 \alpha}{E \cos^2 \alpha + 2F \cos \alpha \sin \alpha + G \sin^2 \alpha}$$