

Kortprojektioner L4 2019

4. mm Stereografisk projektion, Mercatorprojektion og Transversale Mercatorprojektioner. UTM og DKTM

Lisbeth Fajstrup & Iver Ottosen

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

L4 maj 2019

Første fundamentalform og konforme kort

Sætning

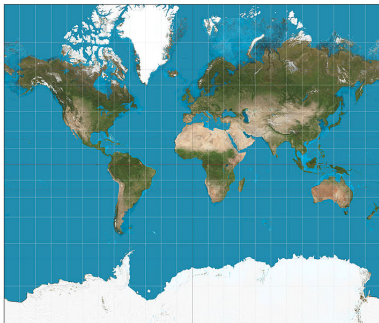
En projektion med første fundamentalform $\tilde{E}$, $\tilde{F}$, $\tilde{G}$ fra en datumflade med første fundamentalform E , F , G med $F = 0$, er konform hvis og kun hvis

$$\tilde{F} = 0 (= F) \text{ og } \frac{\tilde{E}}{E} = \frac{\tilde{G}}{G}$$

for alle (λ, φ)

Målforholdet for en konform projektioner er uafhængigt af retningen. Og omvendt: En projektion, hvis målforhold er uafhængigt af retningen, er konform. Målforholdet er

$$m(\lambda, \varphi) = \sqrt{\frac{\tilde{E}}{E}} = \sqrt{\frac{\tilde{G}}{G}}$$



Mercatorprojektion $(\lambda, \varphi) \rightarrow (k\lambda, k \ln(\tan(\pi/4 + \varphi/2)))$

De(n) eneste konforme cylinderprojektion!

Målforshold

$$m(\lambda, \varphi) = \frac{k}{\cos \varphi}$$

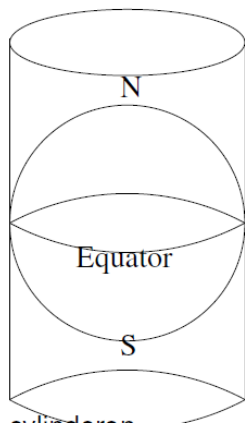
En planprojektion

$$(\lambda, \varphi) \rightarrow r(\varphi)(\cos \lambda, \sin \lambda)$$

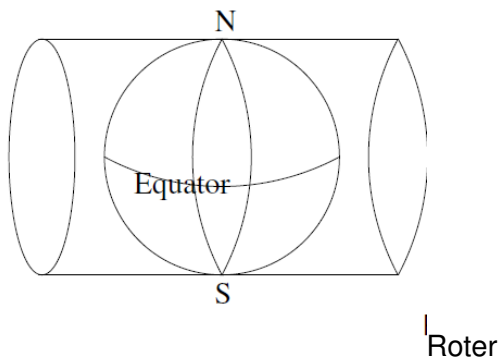
er konform hvis og kun hvis $r(\varphi) = \frac{2k \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}$

Stereografisk projektion - med skalering k - er den eneste konforme planprojektion.

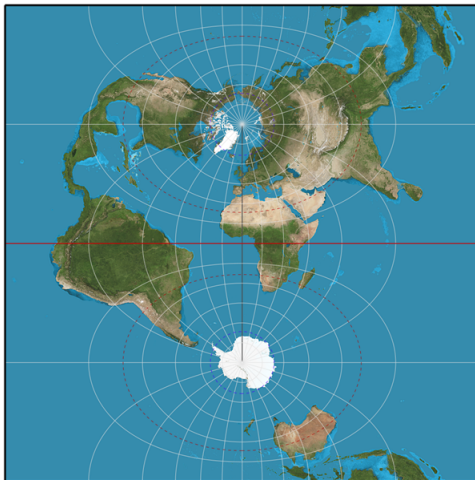
Variationer af Mercator

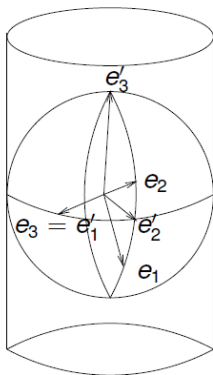
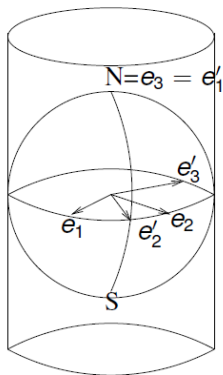


cylinderen .
Eller på skrå - tegn selv.



Transversal Mercator - Midtemeridian: Greenwich





Roter kuglen.

Transversal Mercator fra en kugleflade

Roter kuglen og lav sædvanlig Mercator - sammensat funktion:

1

$$(\lambda, \varphi) \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\lambda) \\ \cos(\varphi) \sin(\lambda) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \rightarrow A \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\lambda) \\ \cos(\varphi) \sin(\lambda) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$$

Hvor A er en rotationsmatrix - afhænger af Midtemeridian, λ_0 .

2

Mercatorprojektion fra den roterede kugleflade: Hvad er de geografiske koordinater for $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$? Svar: $\sin(\hat{\varphi}) = \hat{z}$, $\tan(\hat{\lambda}) = \frac{\hat{y}}{\hat{x}}$.

$$\hat{\lambda} = \arctan(\cot \varphi \cos(\lambda - \lambda_0)), \hat{\varphi} = \arcsin(\cos(\varphi) \sin(\lambda - \lambda_0))$$

3

Transversal Mercator: $(k\hat{\lambda}, k \ln(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\hat{\varphi}}{2})))$

4

Målforskel: $\frac{k}{\cos(\hat{\varphi})} = \frac{k}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \sin^2(\lambda - \lambda_0)}}$

Tranversal Mercator for ellipsoiden

Krav:

- Konform
- m konstant langs λ_0 -meridian
- m er en funktion af *afstanden til λ_0 -meridianen*

Resultat - Gauss Krüger; Taylorudviklet...

$$u = N \cos(\varphi) l + \frac{1}{6} N \cos^3(\varphi) (1 - \tan^2(\varphi) + \eta^2) l^3 + \frac{1}{120} N \cos^5(\varphi) (5 - 18 \tan^2(\varphi) + \tan^4(\varphi)) l^5 + \dots$$

$$v = B + \frac{1}{2} N \cos^2(\varphi) \tan(\varphi) l^2 + \frac{1}{24} N \cos^4(\varphi) \tan(\varphi) (5 - \tan^2(\varphi) + 9\eta^2) l^4 + \dots$$

Her er $\eta^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \cos^2 \varphi$, $l = \lambda - \lambda_0$ og B er afstanden fra Ækvator til breddecirklen φ målt langs en meridian.

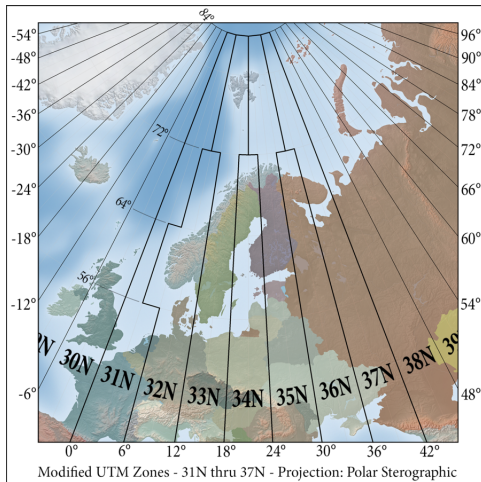
Egenskaber ved transversal Mercator

- Konform
- Målforshold afhænger kun af *afstand til midtelinjen/ λ_0 -meridianen*
- Midtelinjen er en meridian

- $c = 0,9996$
- 60 Zoner
- $\lambda_0 = -15^\circ, -9^\circ, -3^\circ, 3^\circ, 9^\circ, \dots$ Nummer 1 har
 $\lambda_0 = -177^\circ = 177^\circ V$
- m afviger højst 0,0004 fra 1 Nord for $\varphi = 40^\circ$ og syd for $\varphi = -40^\circ$

Ved polerne bruges Universal Polar Stereographic Projection , UPS.
Nord for $84^\circ N$ og syd for $80^\circ S$

UTM zoner i Skandinavien



(Wikipedia Commons Modified UTM-Zones)

UTM i Danmark

- Zone 32, EUREF89 er primær projektion - til lagring og databehandling bortset fra på Bornholm, hvor Zone 33 anvendes.
- Målforskel i DK holder sig indenfor 1 ± 0.0004

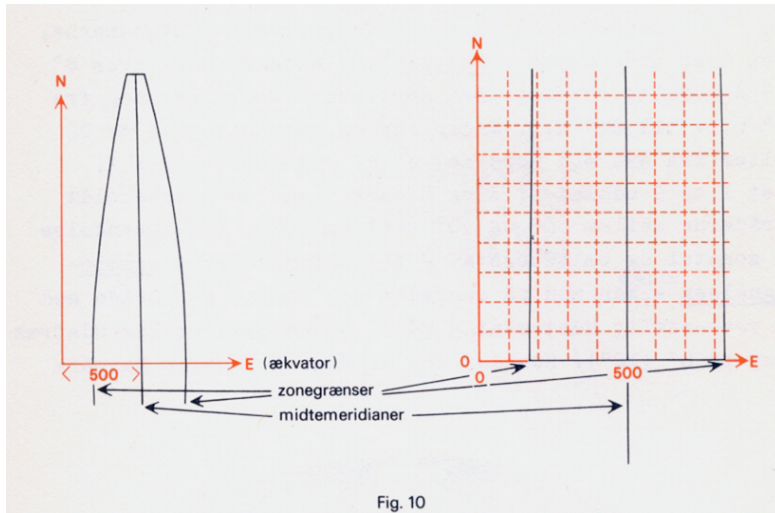
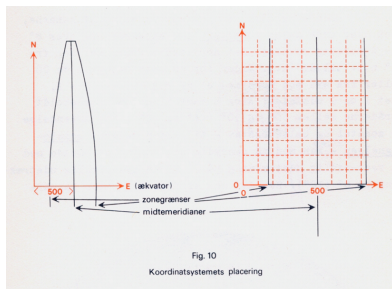


Fig. 10

Koordinater i en UTM-zone



Koordinatnettet (Northing, Easting)
koordinaterne måler Northing parallelt med Midtelinien, Easting
parallelt med Ækvator (som den ser ud i kortet).

- Falsk Easting - Midtelinjens Eastingkoordinat - 500 km.
- Falsk Northing - Ækvators Northingkoordinater - 0 km.
- Lodrette linjer er *ikke* nord-syd. (Bortset fra midtelinjen.)
- Vandrette linjer er *ikke* øst-vest. (Bortset fra Ækvator.)

Transversale Mercatorprojektioner

4 Zoner

<i>Zone</i>	<i>Midtemeridian</i>	<i>Målforhold</i>	<i>False Easting</i>
DKTM1	9°	$c = 0,99998$	200000m
DKTM2	10°	$c = 0,99998$	400000m
DKTM3	11,75°	$c = 0,99998$	600000m
DKTM4	15°	$c = 1$	800000m

Falsk Northing $-5.000.000m$ i alle zoner - i.e., Ækvator har Northingkoordinat $-5.000.000m$.

I UTM har Ækvator Northingkoordinat $0m$, så koordinater kan let skelnes.