

Kortprojektioner L4 2019

6.mm Referencesystemer. Ellipsoider og geoider. Ombecifring. Helmertransformation.

Iver Ottosen & Lisbeth Fajstrup

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

L4 maj 2019

Sidste gang

● Konstruktion af kort - System 34 og TM

- ▶ Hvis man kender målforhold for en konform projektion, kan man finde projektionen
- ▶ Ikke alle funktioner er målforholdsfunktioner. (Eksempelvis er konstant målforhold ikke muligt.)
- ▶ Målforholdet for en TM er

$$m(N, E) = c + \frac{c(E - E_0)^2}{2R^2} + \frac{5c(E - E_0)^4}{24R^4} + \frac{\dots (E - E_0)^6}{6!R^6} + \dots + \frac{\dots (E - E_0)^{2n}}{(2n)!R^{2n}}$$

hvor $R = R_m = \frac{a^2 b}{((a^2 - b^2) \cos^2 \varphi_m + b^2)}$ og φ_m er middelbredden i området.

- ▶ Appraksimativt $m(N, E) = c + \frac{c(E - E_0)^2}{2R^2}$.

Afstandskorrektion

● Afstandskorrektion

- ▶ målforholdet giver information i et punkt af gangen.
- ▶ Man integrerer - kurvelængde er et integral.
- ▶ Flere kurver i spil: Storcirkel, billede af storcirkel, linje i planen, kurve på kuglen svarende til linjen.
- ▶ Med målforhold $m(y, x) = m_0 + Q(x - x_0)^2$ er afstanden mellem $p = (y_1, x_1)$ og $q = (y_2, x_2)$ i kortet d , i naturen S .
 $d - S \sim d_D \sim d[(m_0 - 1) + \frac{Q}{3}[(x_1 - x_0)^2 + (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) + (x_2 - x_0)^2]]$
- ▶ For DKTM er *approximationen* ($R = \sqrt{MN}(\varphi)$, ϕ er middelbredden.):

$$d(-0.00002 + \frac{0.99998}{6R^2}[(E_1 - E_0)^2 + (E_1 - E_0)(E_2 - E_0) + (E_2 - E_0)^2])$$

- ▶ Der er andre *approximationer* til målforhold og afstandskorrektion. Når $E - E_0$ er stor i forhold til R , bliver fejlene betydelige. Implementation afvejer præcision og hastighed af beregninger - og zonebredde. Se eksempelvis C.F.F. Karney *Transverse Mercator with an accuracy of a few nanometers*. Journal of Geodesy, 2011 Vol 85, No 8.

I dag: Fra Jorden til Ellipsoide(r) til kugleflade (til kort)

- Til nu: Kort som afbildning fra kugleflade (elipsoide) til planen.
 $(\lambda, \varphi) \rightarrow (N, E)$
- Hvor kommer geografiske koordinater fra?
- Datums (i flertal) - referencesystemer.
- Omregning mellem sådanne.
- Geoiden.
- Lidt om højder.

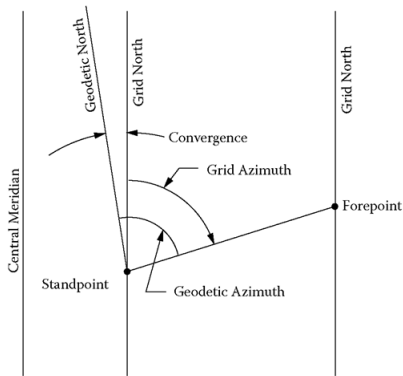
Målforhold - igen

- For punkter på ellipsoiden (hørende til kortet) benyttes formalisme som ovenfor.
- For punkter på geoiden (eller over) er der to skridt; Først *transformeres til ellipsoiden*. Så bruges ellipsoide $\leftrightarrow$ kort som ovenfor.
- Korrektion fra punkt til ellipsoide - se Karsten Jensens slides. Størrelsesorden: med højde h over ellipsoiden skaleres med

$$\mu = \frac{R}{R + h}$$

hvor $R = \sqrt{NM}(\varphi) \sim 6386000m$. Med $h = 50m$ ($H = 10m$) får jeg $\mu = 0,99999217$. På midtemeridianen af en DKTMzone i højde $h = 50$ er skaleringen altså $0,999972 < 0.99998$. Mere præcise tal hos Karsten.

Vinkelkorrektion - OBS: Også for konforme projektioner



Forward Azimuth - tilsvarende omkring "Forepoint"/Station 2

Om vinkler:

- Vinkler skal korrigeres - også i et konformt kort!!
- Azimuthvinkler (vinkel med nord i naturen) er ikke vinklen med “opad” i kortet, da
 - ▶ Meridianer afbildes ikke til linjer parallelle med midterlinjen i en TM.
 - ▶ Storcirkler afbildes ikke til linjer.
- Vinkelsummen i en trekant på kuglefladen er ikke π . Konsekvens: Forskellig geodætisk azimuthvinkel “fra station 1 til station 2” og “fra station 2 til station 1”. OG forskellig Meridiankonvergens.

Modellering af Jorden

- **Fysik:** Tyngdekraft omvendt proportional med afstand.
- Eksempel: Planeter og Solen.
- Jorden og os på den - tyngdepotentialet i et punkt $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$:

$$W(p_0) = \iiint_{Jorden} \frac{\rho((x, y, z))}{|p_0 p|} dv + \frac{\omega_e}{2} \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$

- dv er et volumenelement, $\rho(x, y, z)$ er massefylden i $p = (x, y, z)$, $|p_0 p|$ er afstand fra p til p_0 , ω_e er vinkelhastigheden af Jordens rotation. Og $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ er afstanden fra p_0 til Jordens omdrejningsakse. (Vi har placeret z -aksen i omdrejningsaksen.)

W er en funktion af 3 variable: $W : R^3 \rightarrow R$

Geoiden er en niveauflade for W - en *ækvipotentiaflade*. Svarende til middelvandstanden.

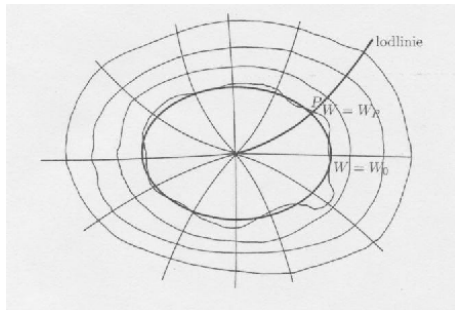
Tyngdekraften er gradienten af W :

$$\vec{g}(x, y, z) = \nabla W(x, y, z)$$

- $\vec{g}$ peger i retning af maksimal ændring af W . (Da det er en gradientvektor).
- $\vec{g}(x, y, z)$ står vinkelret på tangentplanen til $W(x, y, z)$

Funktioner, niveauflader gradientvektorer

Lodlinjen er ikke en linje

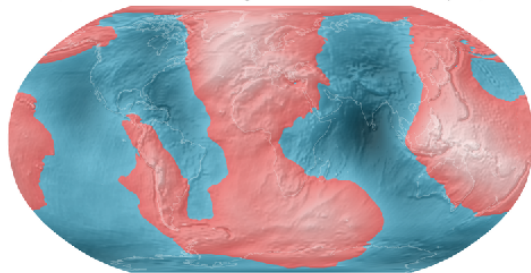


Geoiden er ikke en “pæn” flade

EGM96 geoiden i forhold til WGS84 ellipsoiden

Deviation of the Geoid from the idealized figure of the Earth

(difference between the EGM96 geoid and the WGS84 reference ellipsoid)



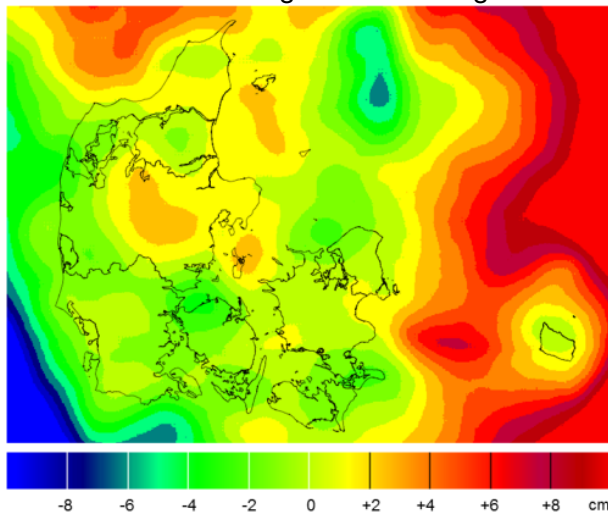
Red areas are above the idealized ellipsoid; blue areas are below.



Fra Wikipedia en.wikipedia.org/wiki/Geoid I Danmark afviger geoiden ca. 40 m fra WGS84 ellipsoiden.

Den danske geoid

Ny geoidemodel i Danmark i 2013. IKKE et nyt DVR90; en opdatering af højdedata i DK i forhold til GPS data. Så GPS højder passer bedre med målte koter. Afvigelse fra 2001-geoiden:



Ellipsoideparametre

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ (N(1 - f^2) + h) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

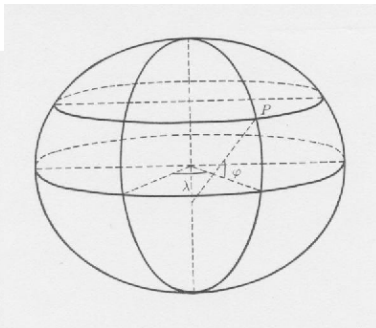
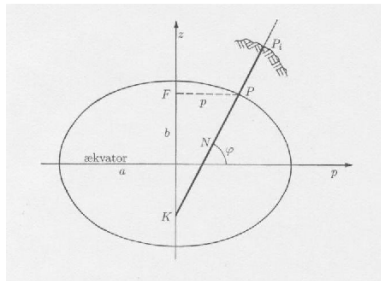
$$f = \frac{a - b}{a}, \text{ fladtrykningen}$$

$$N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

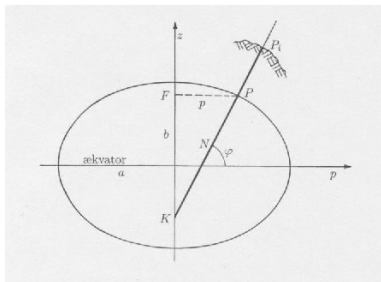
$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$. eccentriciteten.

OBS: N afhænger af φ

- 3D-systemer: (X, Y, Z) eller (λ, φ, h)



Ellipsoideparametre



Storakse med længde $2a$ og lilleakse med længde $2b$

Fladtrykning $f = \frac{a-b}{a}$

(Første) Eccentricitet $e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$

Anden eccentricitet $e'^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2}$

Ellipsens parametre er sædvanligvis a , f - man kan så udregne b , e etc.

Forskellige referenceellipsoider

Ellipsoide	Datum/system	Halv storakse a	1/fladtrykningen
WGS84		6378137	298,2572236
GRS80	EUREF89, ITRF	6378137	298,2572221
Hayford	ED50	6378388	297,0

Placering af ellipsoiden

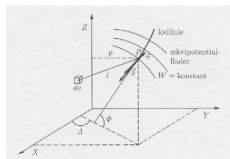
- Hvor skal man begynde...
- Hvilket område skal approksimeres?

Astronomiske koordinater

Lodlinjens retning:

$$\vec{g} = -g\vec{n} = -g \begin{pmatrix} \cos \Phi \cos \Lambda \\ \cos \Phi \sin \Lambda \\ \sin \Phi \end{pmatrix}$$

$\vec{g}$ og koordinaterne Φ og Λ kan bestemmes astronomisk - i forhold til stjerners placering (og hvad klokken er...). Fysiske størrelser. Man vælger Λ_0 , z-aksen er rotationsaksen (gennemsnit) og Ækvator er astronomisk bestemt - et gennemsnit. Celestial Reference System.



ED50 -lokalt datum

- God approksimation i Europa. Må og kan ikke anvendes udenfor Europa.
- Ellipsoide - Hayford = Internationale 1924. $a = 6378388,0m$, $1/f = 297,0$
- Placering ved fastsættelse af $\Phi - \phi$ og $\Lambda - \lambda$ og $H - h$, hvor H er højden over geoiden. I punktet Helmerdturm i Potsdam.

Ellipsoiden samt dens placering udgør et datum, Europæisk Datum 50. Tilhørende ReferenceFrame - punkter målt ind.

ReferenceSystem ITRS

- Globalt system,
- Ellipsoide, GRS80 $a = 6378137m$, $1/f = 298,2572221$
- Placering: Origo i Jordens massemidtpunkt. (For ED50 er der ca. 167 m mellem Jordens og ellipsoidens centrum).
- Akse - Jordens rotationsakse - middelværdi.
- Tilhørende global tyngdefeltsmodel (geoide)
- International Earth Rotation and Reference Systems Service, IERS.org, koordinerer og leverer data.

Referencerammer - Reference Frames

Formål: Beskriv Jorden, så positioner kan bestemmes relativt til andre - referencepunkter. Fysisk realisering af Reference System.

Problem: Jorden har ikke konstant form - kontinentaldrift, tidevand og tidejord,

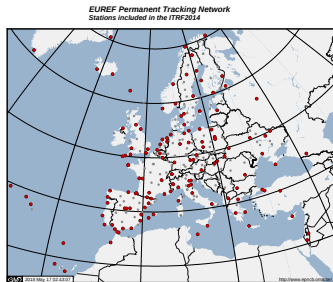
- ITRF, International Terrestrial Reference *Frame* er et antal punkter med $(x, y, z)_{\text{tidspunkt}}$ -koordinater i systemet. Disse opdateres - seneste system fra 2014. Se <http://itrf.ign.fr/> men der er residualer - opdatering efter e.g. jordskælv
- Kontinentaldrift $\rightarrow$ punkter flytter sig.
- Udmøntningen/realisationen/rammen i Europa kaldes ETRF89 (også EUREF89) Følger den europæiske kontinentalplade - ETRF89 = de europæiske punkter i ITRF89, men flytter sig ca. 2.5 cm/år. ETRS89 $\neq$ ITRF2014 forskel ca. 60cm.

GPS $\rightarrow$ koordinater mht. WGS84 $\neq$ ITRS. Men absolut GPS er ikke præcist nok til, at det betyder noget. Differential GPS $\rightarrow$ Pas På!

Galileo - GTRF og GLONASS - PZ-90

- GTRF - Meget tæt på ITRF Afvigelse af størrelsesorden max 0.3 mm.
Se <http://www.navipedia.net/> under Reference Frames in GNSS
- PZ-90 til ITRF90 - Helmert-transformation(!).

ETRS stationer



8 permanente GPS reference stationer i DK. Heraf indgår 3 i ETRS89 (GPS/GLONASS/GALILEO)

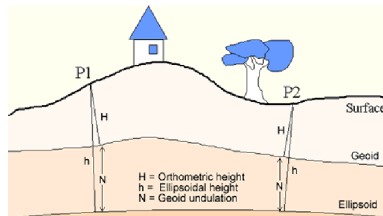
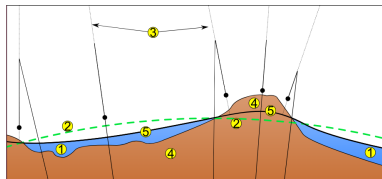
Nettet *fortættes* i DK - REF DK - 95 punkter *udmøntningen af ETRS89 i DK*.

10 km-nettet er en yderligere fortætning - 700 punkter. 3D-koordinater. Og DVR90 koter. UTM-ETRS89 koordinater.

Højdesystemer

- Højde over en af ellipsoiderne.
- Højde over geoiden - DVR.
- Højde over den “gamle” geoide DNN.

Højder langs hvad?



Fra Wikipedia. Fra kartoweb.itc.nl af R. Knippers , A.Mehlbreuer
1. Hav 2. Reference-ellipsoide 3. Lokale lodlinjer 4. Landområder 5.
Geoide

Normaler til ellipsoide $\neq$ lokale lodlinjer = normaler til geoiden.
Geoidehøjden (geoideundulationen) er ca 3 m. med den gamle
(ED50) ellipsoide), ca 40 m. med den nye.

- Danmark vipper: Højdeændring i Sønderjylland (1891-1990) -1,5mm/år (nedad), i Botniske bugt: 9mm/år, opad.
- DVR90 er middelvandstanden i 1990.
- Referencenet - 3000 punkter præcist nivelleret. Fortættet til 67000 punkter.
- DNN, Dansk Normal Nul, defineret i 1950'erne.

Systemer i Danmark

- ED50 (λ, φ, h),
- ETRS89/EUREF89 (λ, φ, h) og (X, Y, Z)
- Højder:
 - ▶ Ellipsoidehøjder h_{ED50} , h_{ETRS89}
 - ▶ DNN-højde (Århus Domkirke 5,570m)
 - ▶ DVR90 højde (Århus Domkirke 5,6150m). Geoidemodel dvr90g2013.01 erstatter dvr90g2002.01
- Kort:
 - ▶ System 34, System 45(Bornholm), (Tidligere også System Ostenfeld (Sønderjylland) (y, x))
 - ▶ UTM_{ED50} , UTM_{ETRS89} , (N, E)_{xx}
 - ▶ KP2000, 3 Zoner, (N, E) (stort set ikke i brug.)
 - ▶ DKTM, 4 zoner, (N, E)
 - ▶ Søkort i Mercatorprojektion.

3D eller 2D+1D

Koordinater for et punkt - eksempler:

- ❶ $(X, Y, Z)_{ETRS89}$
- ❷ $(\lambda, \varphi, h)_{ETRS89}, (\lambda, \varphi, h)_{ED50}$
- ❸ $(N, E)_{ETRS89}, H_{DVR90}$
- ❹ $(N, E)_{ED50}, H_{DVR90}$
- ❺ $(N, E)_{ETRS89}, H_{DNN}$
- ❻ $(N, E)_{ETRS89}, h_{ETRS89}$ (ellipsoidehøjden)

1) og 2) er 3D-systemer. De andre er 2D+1D. ($\neq$ 3D!!)

Omregning/ombecifring

- Skift af datum 3D
- Skift af kort 2D
- Skift af højdesystem. 1D
- Skift af højdesystem og kortets koordinater hver for sig. 2D+1D
 $\neq 3D$

Transformationer af 3D-systemer - alle tre koordinater på en gang.

Eksempel:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{WGS84} = kR \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{ED50} - \vec{w} \right)$$

R er en rotationsmatrix

Omregning fra ETRS89 til ED50

$$(\lambda, \varphi, h)_{ETRS89} \leftrightarrow (X, Y, Z)_{ETRS89} \leftrightarrow (X, Y, Z)_{ED50} \leftrightarrow (\lambda, \varphi, h)_{ED50}$$

Afbildningen mellem $(X, Y, Z)_{ETRS89}$ og $(X, Y, Z)_{ED50}$ ("teknisk koordinatsystem" - man bruger ikke de koordinater ellers) er en Helmertransformations - en 7-parametertransformation.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{ED50} = kR^{-1} \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{EUREF89} - \vec{w} \right)$$

R (og R^{-1}) er en rotationsmatrix.

Kartesiske til geografiske koordinater på ellipsoiden

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ (N(1 - f)^2 + h) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{Z + Nf(2 - f) \sin \varphi}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \right)$$

$$\lambda = \tan^{-1} \left(\frac{Y}{X} \right)$$

$$h = \sqrt{(Z + Nf(2 - f) \sin \varphi)^2 + (X^2 + Y^2)} - N$$

Iterative algoritmer.

Helmerttransformationer - Mellem 3D kartesiske koordinatsystemer.

$$kR^{-1} \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{EUREF89} - \vec{w} \right)$$

7 parametre?

7 parametre!

$R =$

$$\begin{pmatrix} \cos r_z & \sin r_z & 0 \\ -\sin r_z & \cos r_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos r_y & 0 & -\sin r_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin r_y & 0 & \cos r_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos r_x & \sin r_x \\ 0 & -\sin r_x & \cos r_x \end{pmatrix}$$

$$1/k = 1,0 - 0,540645 \cdot 10^{-6}$$

$$\vec{w} = (-81,0703m, -89,3603m, -115,7526m), r_x = -0,48488'',$$
$$r_y = -0,02436'', r_z = -0,41321''$$

Helmertransformationer

- Fotogrammetri: Omregning fra et billedplan til et andet - i forskellige kamerapositioner
- Fra ITRF til EUREF OBS: EUREF flytter sig hele tiden i forhold til ITRF- kontinentaldrift.
- Fra ITRF1989 til ITRF2014
- Fra GZ90 til ITRF2014
- Fra nuværende til fremtidige systemer og "frames".

Prediktioner - find en transformation ud fra kendte punkter.

Nogle punkter kendt i 2 systemer A og B: $(x_1, y_1, z_1)^A, (x_1, y_1, z_1)^B, (x_2, y_2, z_2)^A, (x_2, y_2, z_2)^B, \dots, (x_7, y_7, z_7)^A, (x_7, y_7, z_7)^B$.

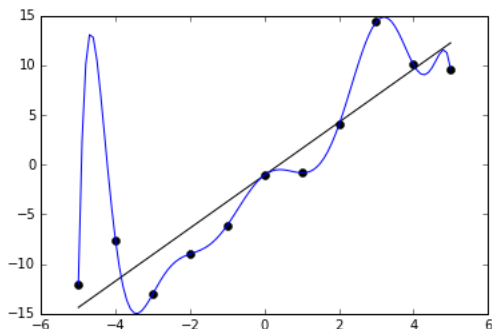
Find en funktion (polynomium, Helmerttransformation,...), som "passer" (OBS: Næsten passer = statistik):

$$F(x_1, y_1, z_1)^A = (x_1, y_1, z_1)^B, F(x_2, y_2, z_2)^A = (x_2, y_2, z_2)^B \text{ etc.}$$

Nye koordinater kan omregnes: $(x, y, z)^B = F(x, y, z)^A$

- Polynomiet (N, E) "teknisksystem" $\rightarrow (N, E)_{ED50}$ -prediktion.
- Omregninger fra e.g. GTRF (reference for Galileo) og PZ-90 (reference for GLONASS) - prediktion (af de 7 parametre i en Helmerttransformation)
- Alt, hvad der involverer System 34: Prediktion!
- Find polynomier, der passer i de punkter - $(x, y) \rightarrow (p_1(x, y), p_2(x, y))$.

Find polynomier, der approksimerer godt - men ikke for godt.



Den blå graf er et polynomium. Den er sikkert ikke en god prediktor for, hvor nye punkter ligger. Linjen er bedre. Den blå overfitter.

Prediktioner - polynomier

Hvis $p_1(x, y)$ og $p_2(x, y)$ er 2. grads polynomier er der 6 koefficienter i hvert - ialt - en 12-parameter-transformation.

$$p(x, y) = a_0 + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{20}x^2 + a_{02}y^2$$

Fitning til kendte punkter giver *ligninger for koefficienterne*.

I et n 'te grads polynomium med to variable er der

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + 1 = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \text{ koefficienter.}$$

OBS: For høj grad af polynomier - overfitting. For lav grad - upræcist.

Vægtning af punkterne - *statistiske metoder*.

Prediktioner

Hvis vi ved, $(x, y) \rightarrow p(x, y) = (x_1, y_1)$ er rotation, skalering og translation:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

så er det en Helmertransformations i 2D, 4 parametre: t_1, t_2, k, α

Prediktioner: Komplekse polynomier

Koordinatskift mellem konforme kort $x_B = p_1(x_A, y_A)$, $y_B = p_2(x_A, y_A)$
(to andengradspolynomier - ialt 12 koefficienter.)

Kan skrives

$$x_B + iy_B = w_2(x_A + iy_A)^2 + w_1(x_A + iy_A) + w_0$$

(fordi vi ved, det er konformt). w_0, w_1, w_2 er komplekse tal $\rightarrow$ ialt 6 koefficienter.

Færre koefficienter $\rightarrow$ behov for færre kendte punkter.

Tilsvarende for polynomier af højere grad.