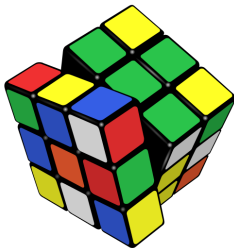
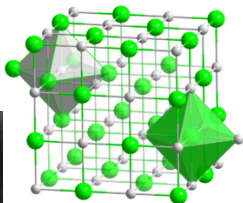


Symmetri – i natur, kunst og matematik

Lisbeth Fajstrup og Bedia Akyar Møller

Institut for matematiske fag
Aalborg Universitet

1. februar 2018



Billeder af algebra! Gruppeteori!

Projektets baggrund

En bro mellem gruppeteori og geometri

- Abstrakt gruppeteori på MAT3
- Symmetriprojekt på MAT4
- (Differential-)Geometri på MAT5
- Projektet bygger bro
- Projektet konkretiserer (brug af) gruppeteori
- Projektet beskæftiger sig (bl.a.) med klassifikation
- Kun svag sammenhæng med kursusaktiviteter på MAT4

Gruppedannelse –inden gruppeteorien...

Emner – Vejledere

- Efter introduktionen: fem grupper
- Fire emneområder
- To vejledere
 - ▶ Bedia A. Møller
 - ▶ Lisbeth Fajstrup
- Fælles aktivitet - Introduktion til algebraiske emner og andet, som har fælles interesse for grupperne.

Indholdsoversigt

- 1 Polygoner, platoniske legemer og deres symmetri
- 2 Flytninger og symmetrigrupper
- 3 Arkitektur og symmetri: da Vincis sætning
- 4 Mønstre, ornamenter, M.C.Escher; krystaller
- 5 Symmetri og virus
- 6 Rubiks terning

Platoniske legemer

Regulære polyedre (*mangesider*)



- ① Tetraeder
- ② Terning
- ③ Oktaeder
- ④ Ikosaeder
- ⑤ Pentagondodekaeder

har stor grad af **symmetri**:

Mange drejninger og spejlinger **overfører legemet i sig selv!**

Regulære polygoner og deres symmetri

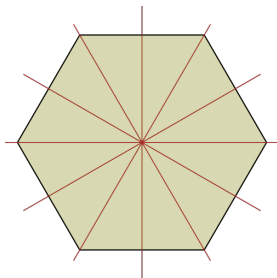


Figure: Regulær sekskant med symmetriakser

Symmetrier:

- ① Drejninger
- ② Spejlinger

Regulære polygoner og deres symmetri

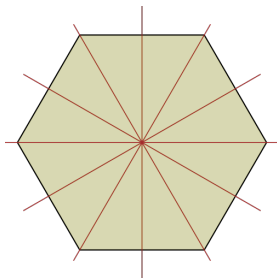


Figure: Regulær sekskant med symmetriakser

Symmetrier:

① Drejninger

② Spejlinger

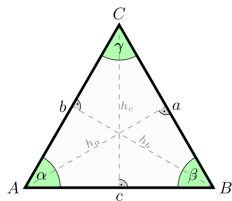
og deres **komposition** (sammensætning).

Symmetrioperationerne udgør polygonens **symmetrigruppe**: **Diedergruppen** D_n .

Symmetrigruppen D_3

af en ligesidet trekant

består af spejlinger S_A, S_B, S_C , rotationer (drejninger) R_{120}, R_{240} og identitet i . Den har følgende **kompositionstavle**:



$\circ$	i	R_{120}	R_{240}	S_A	S_B	S_C
i	i	R_{120}	R_{240}	S_A	S_B	S_C
R_{120}	R_{120}	R_{240}	i	S_B	S_C	S_A
R_{240}	R_{240}	i	R_{120}	S_C	S_A	S_B
S_A	S_A	S_C	S_B	i	R_{240}	R_{120}
S_B	S_B	S_A	S_C	R_{120}	i	R_{240}
S_C	S_C	S_B	S_A	R_{240}	R_{120}	i

(første flytning i søjle, anden flytning i række)

Det grundlæggende: Flytninger

Drejninger og spejlinger er eksempler på flytninger:

En afbildning f fra planen (eller rummet) ind i sig selv kaldes en **flytning** eller **isometri**, hvis og kun hvis den bevarer afstande:

For alle punkter P, Q gælder:

$$|\overline{PQ}| = |\overline{f(P)f(Q)}|.$$

Det grundlæggende: Flytninger

Drejninger og spejlinger er eksempler på flytninger:

En afbildning f fra planen (eller rummet) ind i sig selv kaldes en **flytning** eller **isometri**, hvis og kun hvis den bevarer afstande:

For alle punkter P, Q gælder:

$$|\overline{PQ}| = |\overline{f(P)f(Q)}|.$$

Man kan vise, at en flytning

- ① er **vinkelbevarende**, og
- ② overfører en figur i en **kongruent** figur.

Det grundlæggende: Flytninger

Drejninger og spejlinger er eksempler på flytninger:

En afbildning f fra planen (eller rummet) ind i sig selv kaldes en **flytning** eller **isometri**, hvis og kun hvis den bevarer afstande:

For alle punkter P, Q gælder:

$$|\overline{PQ}| = |\overline{f(P)f(Q)}|.$$

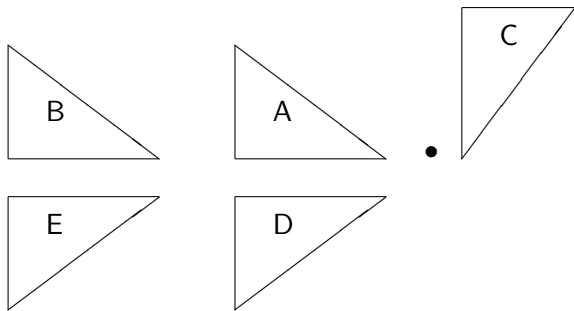
Man kan vise, at en flytning

- ① er **vinkelbevarende**, og
- ② overfører en figur i en **kongruent** figur.

Spørgsmål:

Hvilke typer flytninger findes der i planen (rummet)?

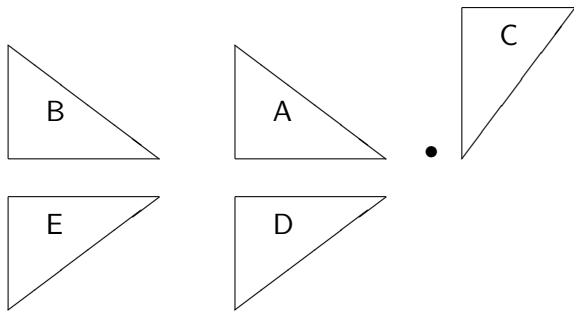
Fire typer flytninger i planen



Fire slags flytninger udført på figur A:

translation = parallelforskydning(B), rotation=drejning(C), spejling(D) og
glidespejling(E)

Fire typer flytninger i planen



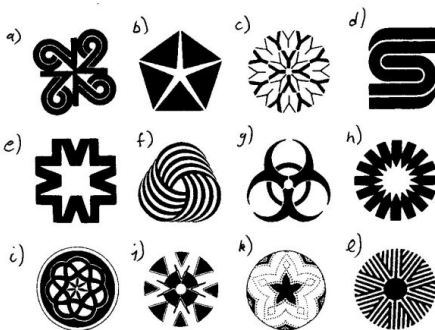
Fire slags flytninger udført på figur A:

translation = parallelforskydning(B), rotation=drejning(C), spejling(D) og
glidespejling(E)

Web-illustration

Arkitektur: Leonardo da Vincis sætning

Rosettegrupper – symmetri af begrænsede plane figurer



Arkitektur: Leonardo da Vincis sætning

Rosettegrupper– symmetri af begrænsede plane figurer

Symmetrigruppen $Sym(F)$ af en figur eller et ornament F (rosettegruppen) består af alle flytninger som overfører F is sig selv. Enhver begrænset plan figur F har som symmetrigruppe $Sym(F)$ enten

- 1 en diedergruppe D_n (drejninger og spejlinger) eller
- 2 en cyklisk gruppe C_n (kun drejninger).

Arkitektur: Leonardo da Vincis sætning

Rosettegrupper– symmetri af begrænsede plane figurer

Symmetrigruppen $Sym(F)$ af en figur eller et ornament F (rosettegruppen) består af alle flytninger som overfører F is sig selv. Enhver begrænset plan figur F har som symmetrigruppe $Sym(F)$ enten

- 1 en diedergruppe D_n (drejninger og spejlinger) eller
- 2 en cyklisk gruppe C_n (kun drejninger).

Argument: Tyngdepunktet skal bevares! – under hver symmetri! Derfor kan $Sym(F)$ kun indeholde drejninger og spejlinger – hverken translationer eller glidespejlinger!

Vælg akser (drejninger) med mindst mulig vinkel.

Arkitektur: Leonardo da Vincis sætning

Rosettegrupper– symmetri af begrænsede plane figurer

Symmetrigruppen $Sym(F)$ af en figur eller et ornament F (rosettegruppen) består af alle flytninger som overfører F is sig selv. Enhver begrænset plan figur F har som symmetrigruppe $Sym(F)$ enten

- 1 en diedergruppe D_n (drejninger og spejlinger) eller
- 2 en cyklisk gruppe C_n (kun drejninger).

Argument: Tyngdepunktet skal bevares! – under hver symmetri! Derfor kan $Sym(F)$ kun indeholde drejninger og spejlinger – hverken translationer eller glidespejlinger!

Vælg akser (drejninger) med mindst mulig vinkel.

Rosette-mønstre – cyklisk Rosette-mønstre – dieder

Do it yourself !

Symmetrier af begrænsede delmængder af rummet

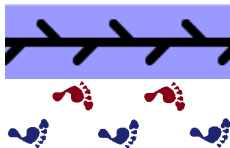


- Rotationer – undergrupper af $SO(3)$
- Spejlinger og rotationer – undergrupper af $O(3)$

Båndornamenter og frisegrupper 1

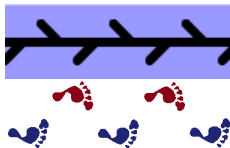
Translationer

Eksempler: Friser, vaser, trøjer, musik!



Båndornamenter og frisegrupper 1

Translationer



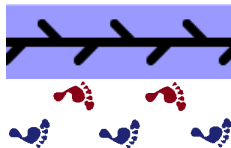
Eksempler: Friser, vaser, trøjer, musik!

Et båndornament har en centerlinje c , som overføres i sig selv under alle ornamentets symmetrier.

Ornamentets symmetrigruppe $Sym(F)$ indeholder translationer langs med centerlinjen med en eller flere enheder – i begge retninger.

Båndornamenter og frisegrupper 1

Translationer



Eksempler: Friser, vaser, trøjer, musik!

Et båndornament har en centerlinje c , som overføres i sig selv under alle ornamentets symmetrier.

Ornamentets symmetrigruppe $Sym(F)$ indeholder translationer langs med centerlinjen med en eller flere enheder – i begge retninger.

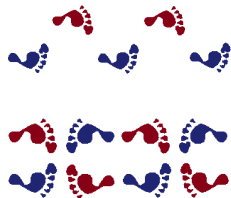
Hver af disse translationer kan karakteriseres ved et heltal – hvor mange enheder til højre eller venstre?

Translationerne danner en undergruppe $T(F) < Sym(F)$ – som er isomorf med heltalsgruppen $(\mathbb{Z}, +)$.

Båndornamenter og frisegrupper 2

Frisegruppen

Frisegruppen $Sym(F)$ svarende til F består af alle ornamentets symmetrier.



Båndornamenter og frisegrupper 2

Frisegruppen

Frisegruppen $Sym(F)$ svarende til F består af alle ornamentets symmetrier.

Den kan (udover translationerne) indeholde:



- ① Spejlinger i centerlinjen c ;
- ② Spejlinger i akser $\perp c$;
- ③ Punktspejlinger i punkter på c ,
og/eller
- ④ Glidespejlinger (med c som akse).

Der findes 7 væsensforskellige typer frisegrupper.

Båndornamenter og frisegrupper 2

Frisegruppen

Frisegruppen $Sym(F)$ svarende til F består af **alle** ornamentets symmetrier.

Den kan (udover translationerne)
indeholde:



- ① Spejlinger i centerlinjen c ;
- ② Spejlinger i akser $\perp c$;
- ③ Punktspejlinger i punkter på c ,
og/eller
- ④ Glidespejlinger (med c som akse).

Der findes **7** væsensforskellige typer
frisegrupper.

Frisemønstre Do it yourself!

Plane ornamenter



(Fra

Mathigon)

Eksempler: Tapeter, islamiske mønstre,

M. C. Eschers tegninger

Plane ornamenter



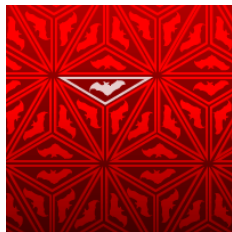
(Fra

Mathigon)

Eksempler: Tapeter, islamiske mønstre, M. C. Eschers tegninger

Et (uendeligt) **plant ornament** F er karakteriseret ved, at der findes translationer i **to forskellige** (ikke-parallele/lineært uafhængige) retninger, som overfører ornamentet i sig selv.

Plane ornamenter



(Fra

Mathigon)

Eksempler: Tapeter, islamiske mønstre, M. C. Eschers tegninger

Et (uendeligt) **plant ornament** F er karakteriseret ved, at der findes translationer i **to forskellige** (ikke-parallele/lineært uafhængige) retninger, som overfører ornamentet i sig selv.

En translation karakteriseres ved **et par af heltal** (hvor mange enheder i den første retning ($\pm$), hvor mange i den anden ($\pm$)).

Translationerne danner en undergruppe $T(F) \leq \text{Sym}(F)$, som er isomorf med **gruppen af heltalspar** $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$.

Tapetgrupper

Ornamentgruppen eller tapetgruppen $Sym(F)$ indeholder alle ornamentets symmetrier. Udover parallelforskydningerne kan den indeholde

- 1 Drejninger med vinklen 0° , 60° , 90° , 120° , 180° , 240° , 270° , 300° (kun disse er mulige: den krystallografiske restriktion);
- 2 Spejlinger i akser parallel til forskydningsvektorer;
- 3 Glidespejlinger i akser parallel til forskydningsvektorer.

Der findes 17 væsensforskellige typer ornamentgrupper (tapetgrupper).

Tapetgrupper

Ornamentgruppen eller tapetgruppen $Sym(F)$ indeholder alle ornamentets symmetrier. Udover parallelforskydningerne kan den indeholde

- 1 Drejninger med vinklen 0° , 60° , 90° , 120° , 180° , 240° , 270° , 300° (kun disse er mulige: den krystallografiske restriktion);
- 2 Spejlinger i akser parallel til forskydningsvektorer;
- 3 Glidespejlinger i akser parallel til forskydningsvektorer.

Der findes 17 væsensforskellige typer ornamentgrupper (tapetgrupper).

Do it yourself 1! Do it yourself 2!

Analyse af et givet ornament

F Ornamentet

$Sym(F)$ Symmetrigruppen (*17 typer*)

$T(F)$ Undergruppen af parallelforskydninger ($\cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$)

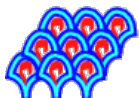
$P_0(F)$ Punktgruppen ($\cong I, C_2, C_3, C_4, C_6, D_2, D_3, D_4, D_6$)

$N(F)$ Net eller gitter (billeder af ét punkt under $T(F)$). Der er fem typer: *parallelogram, rektangulær, centreret rektangulær, kvadratisk, hexagonal*

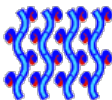
$M(F)$ Motiv: lukket delmængde af planen, således at $Sym(F)(M(F))$ overdækker planen og er minimal med denne egenskab

17 tapetgrupper

pl



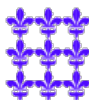
pg



pgg



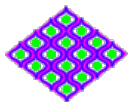
pm



cm



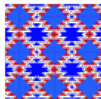
cmm



pmg



pmm



p2



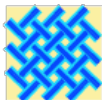
p4



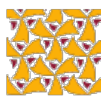
p4m



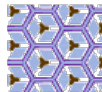
p4g



p3



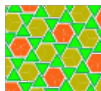
p3m1



p31m



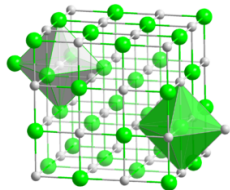
p6



p6m

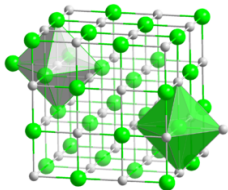


Krystallers symmetri



Krystaller vokser rumligt regelmæssigt med udgangspunkt i deres molekulære struktur.

Krystallers symmetri

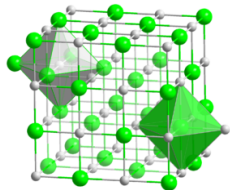


Krystaller vokser rumligt regelmæssigt med udgangspunkt i deres molekulære struktur.

Man kan vise rent matematisk, at der findes ialt 230 væsensforskellige symmetrigrupper (de såkaldte **rumgrupper**) for krystalstrukturer.

Man bruger dem især ved røntgenanalyse af sådanne strukturer.

Krystallers symmetri



Krystaller vokser rumligt regelmæssigt med udgangspunkt i deres molekulære struktur.

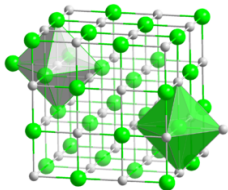
Man kan vise rent matematisk, at der findes ialt 230 væsensforskellige symmetrigrupper (de såkaldte **rumgrupper**) for krystalstrukturer.

Man bruger dem især ved røntgenanalyse af sådanne strukturer.

En væsentlig begrænsning er igen den **krystallografiske restriktion**:

De eneste mulige drejninger i et rumligt mønster har vinkler 0° , 60° , 90° , 120° , 180° , 240° , 270° , 300° .

Krystallers symmetri



Krystaller vokser rumligt regelmæssigt med udgangspunkt i deres molekulære struktur.

Man kan vise rent matematisk, at der findes ialt 230 væsensforskellige symmetrigrupper (de såkaldte **rumgrupper**) for krystalstrukturer.

Man bruger dem især ved røntgenanalyse af sådanne strukturer.

En væsentlig begrænsning er igen den **krystallografiske restriktion**:

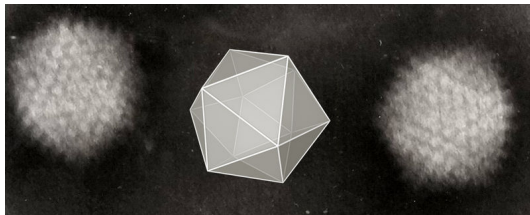
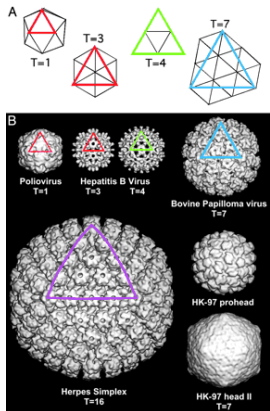
De eneste mulige drejninger i et rumligt mønster har vinkler 0° , 60° , 90° , 120° , 180° , 240° , 270° , 300° .

Kemi og symmetri 1

Kemi og symmetri 2

Flere muligheder hvis man tillader mere fleksible **topologiske** symmetrier

Symmetrier i virus



De fleste vira har en viruscapsid, som ligner et ikosaeder.

Hvorfor er viruscapsider ikosaederformede?

Genetisk økonomi - mange ens byggeklodser - så symmetrisk som muligt.
(Watson og Crick)

Matematikspørgsmål: I hvilken forstand er et ikosaeder det "mest symmetriske"?

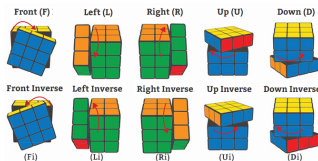
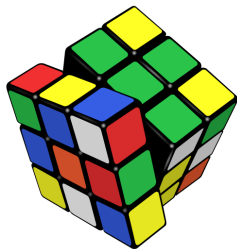
Hvilke andre muligheder er der?

Hvor stor en symmetrigruppe har ikosaederet?

Hvor stor en byggeklods skal man bruge - "Fundamental domain"

$\rightsquigarrow$ Endelige undergrupper af $SO(3)$

Rubiks terning



Rubiks terning

Elementære drejninger: F (front), B (back), U (top), D (bottom), L (left), R (right).

Symmetrigruppen er en undergruppe af permutationsgruppen S_{48} af de 48 terninger som ikke er i centrum af en side. Den har orden

$$|G| = 43.252.003.274.489.856.000 = 2^{27} 3^{14} 5^3 7^2 11.$$

Enhver konfiguration kan overføres til udgangspunktet ved højst 20 elementære drejninger.