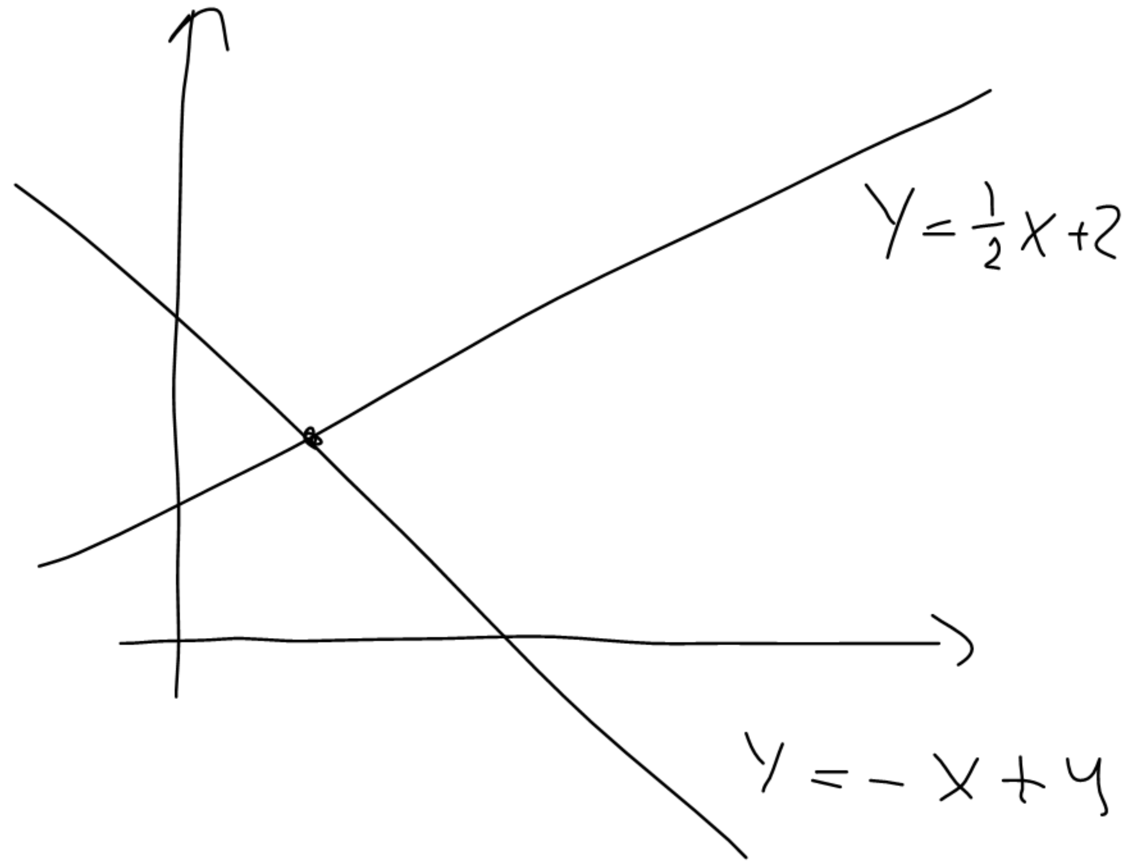
Afsnit 1.1: Matrices and vectors.

$$-\frac{1}{2}x + y = 2$$
$$1 \cdot x + y = 4$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

2×3 matrix



En $m \times n$ matrix A består af mn tal skrevet i m rækker og n søjler. Indgang (i, j): i række i, søjle j står tallet $\underline{a_{ij}}$.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3×2 matrix

$a_{21} = 3$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \underline{3} & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

3×4 matrix

$b_{13} = 3$

Regneoperationer:

Skalar-multiplikation: Hvis A er en $m \times n$ matrix og s er et reelt tal (skrives $s \in \mathbb{R}$)

så er $B = sA$ en $m \times n$ matrix med $b_{ij} = sa_{ij}$.

$$4 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 8 & -4 \\ 8 & 16 & 24 \end{bmatrix}$$

Addition: Hvis A og B er $m \times n$ matricer
så er $C = A + B$ en $m \times n$ matrix med $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 7 & 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\cancel{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad , \; 2 \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A + 2A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 12 & 9 \end{bmatrix} = 3 \cdot A$$

<u>Regneregler</u>

$$(s+t)A = sA + tA$$

hvor A matrix
$s, t \in \mathbb{R}$

$$s \cdot (A+B) = sA + sB$$

Vektorer:En $m \times 1$ matrix kaldes en (søjle-) vektor (med m komponenter.

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

vektor med 4 komponent

$\vec{v} \in \mathbb{R}^4$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^m$ er mængden af vektorer med m komponenter.

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

SET

mængde med

3 vektorer

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \in M$$

En $1 \times n$ matrix kaldes en rækkevektor.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$ rækkevektor

$$(2, 4, -1, 3, 7)$$

Transponering: Hvis A er $m \times n$ matrix så er $B = A^T$ (A transponeret) en $n \times m$ matrix med $b_{ij} = \cancel{aji}$. a_{ji}

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad 2 \times 3$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \qquad 3 \times 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T$$

Nulvektor i $\mathbb{R}^4$:

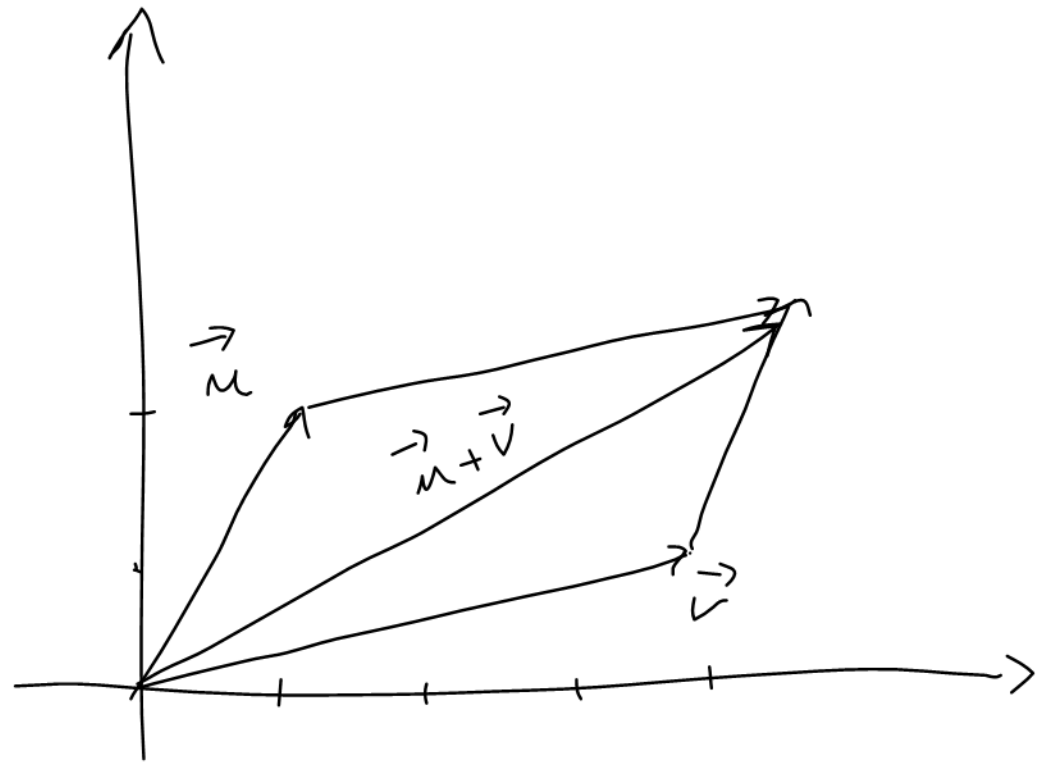
$$\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^2$ er planen.

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$



Afsnit 6.1 / 7.1: The geometry of vectors

$\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ har længde

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{4^2+1} = \sqrt{17}$$

$\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ har afstand:

$$\sqrt{(4-1)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$\|$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 4-1 \\ 1-5 \end{bmatrix} \right\| = \| \vec{v} - \vec{u} \|$$

Generelt

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad i \ \mathbb{R}^n$$

har lengde (norm)

$$\| \vec{v} \| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{i } \mathbb{R}^4 \quad \text{har længde}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2 + 2^2} =$$

$$\sqrt{1 + 4 + 16 + 4} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{Sæt} \quad \vec{u} = \frac{1}{5}\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$\|\vec{u}\| = \frac{1}{5}\|\vec{v}\| = \frac{1}{5} \cdot 5 = 1 \quad \text{enhedsvektor}$$

$\vec{u}$ fås ved normalisering af $\vec{v}$

Regneregel $\quad \|c\vec{v}\| = |c| \cdot \|\vec{v}\|$

Prikprodukt

Hvis $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ og $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

så er

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

EKS

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix} = 4 \cdot 5 + 3 \cdot (-6) = 20 - 18 = 2$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + 1 \cdot 5 = 8 + 21 + 5 = 34$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 - 3 - 6 + 8 = 0$$

Hvis $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ så er $\vec{u}$ og $\vec{v}$ ortogonale (vinkelrette)

Hvis $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ så er

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = v_1 v_1 + v_2 v_2 + v_3 v_3 = \|\vec{v}\|^2$$

<u>Sætning 7.2</u> (Pythagoras)

Lad $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

Så er

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

hvis og kun hvis

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\underline{\|\vec{u}+\vec{v}\|^2} = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) =$$

$$\vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} = \underline{\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|} +$$

$$2\vec{u}\cdot\vec{v}$$