Matricer, vektorer og regneoperationer

En $m \times n$ **matrix** A består af mn tal skrevet i m rækker og n søjler.
a_{ij} er tallet der står i række i, søjle j.
$i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ og $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

En $m \times 1$ matrix er en **(søjle-) vektor** med m komponenter.
Indgang i i vektoren $\mathbf{v}$ betegnes ofte v_i.
Mængden af disse vektorer skrives $\mathbb{R}^m$. $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$

En $1 \times n$ matrix er en **rækkevektor** med n komponenter.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad 2 \times 3 \text{ matrix}$$

$$a_{22} = 2$$

Søjlerne

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \end{bmatrix}$$

Rækker $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

Hvis A og B begge er $m \times n$ matricer så defineres **sum** af A og B ved:
$A + B$ er $m \times n$ matricen, hvor der i indgang (i, j) står $a_{ij} + b_{ij}$.

Hvis A er en $m \times n$ matrix og $c \in \mathbb{R}$ er en skalar (tal) så defineres **skalar multiplikation** ved:
cA er $m \times n$ matricen hvor der i indgang (i, j) står ca_{ij}.

Hvis A er en $m \times n$ matrix så defineres den **transponerede** matrix ved:
A^T er $n \times m$ matricen hvor der i indgang (i, j) står a_{ji}.

Linear kombination

Hvis $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ er (søjle-) vektorer og $c_1, c_2, \ldots, c_k$ er skalarer så siger vi at udtrykket

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k$$

er en **linear kombination** af $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$.

Standardvektorerne i $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2$$

Er $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ en linear kombination af

$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Nej $3 \neq 6$ men $2 = 2$ og $-1 = -1$

Prikprodukt, norm, ortogonalitet

Lad $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$.

Så er **prikproduktet** af $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ defineret som

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n.$$

$\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ siges at være **ortogonale** hvis $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Normen (længden) af $\mathbf{u}$ er

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2} = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}.$$

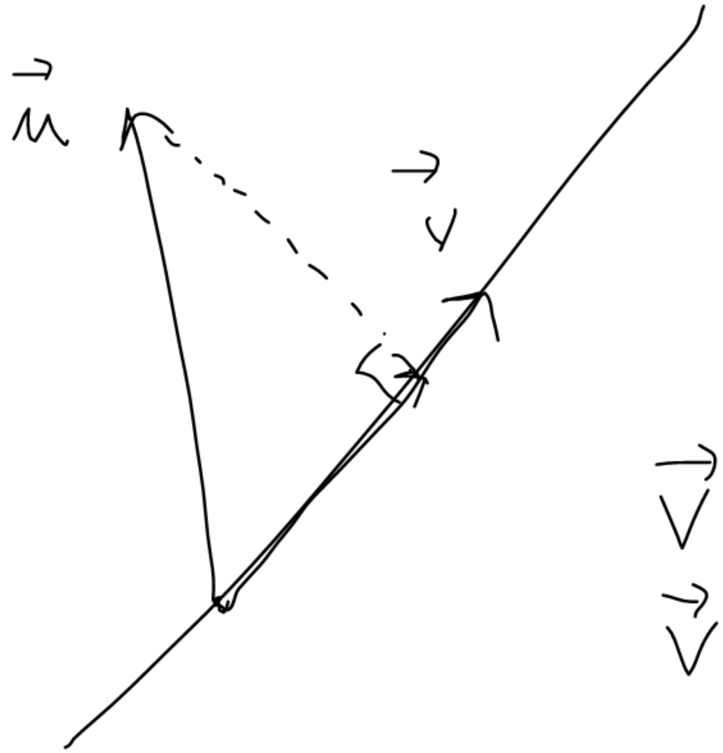
Afstanden mellem $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er $||\mathbf{u}-\mathbf{v}||$.

Normalisering af $\mathbf{v}$:
Hvis $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ så er $\frac{1}{||\mathbf{v}||}\mathbf{v}$ en vektor med norm 1.

Pythagoras: $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$ hvis og kun hvis $||\mathbf{u}+\mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2 + ||\mathbf{v}||^2$.

Ortogonal projektionen af $\mathbf{u}$ på linien med retningsvektor $\mathbf{v}$, hvor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ beregnes som

$$\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||^2}\mathbf{v}.$$



$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = 12 + 10 + 12 = 34$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = 4 + 4 + 9 = 17$$

Proj. af $\vec{u}$ på $\vec{v}$:

$$\frac{34}{17} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

1.2 Matrix-vektor produkt

Lad $A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$ $\underline{m} \times n$ matrix

og $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Så defineres

$$A\vec{v} = v_1\vec{a}_1 + v_2\vec{a}_2 + \dots + v_n\vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$$

(1. metode til beregning af $A\vec{v}$)

<u>EKS</u>

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{v} = 3\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 13 \\ 3 \end{bmatrix}$$

---

13 fremkommer som: $-3 + 12 + 4 =$

$$3 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 2$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

A's række 2

$\vec{v}$

$A\vec{v}$'s komponent nr. i =

(A's række nr. i) $\cdot\ \vec{v}$

(2. metode til beregning af $A\vec{v}$)

EKS

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 3\cdot 4 + 4\cdot 3 \\ 5\cdot 2 + (-1)\cdot 1 + 0\cdot 4 + 2\cdot 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4+1+12+12 \\ 10-1+0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 15 \end{bmatrix}$$

1.3 Ligningssystemer

Lineær ligning:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

$a_1, a_2, \dots, a_n, b$ kendte tal

$x_1, x_2, \dots, x_n$ ubekendte

Liniens ligning $\quad a_1 x + a_2 y = b$

Planens ligning $\quad a_1 x + a_2 y + a_3 z = b$

Lineært ligningssystem: et antal lineære ligninger

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\
2x_1 + x_2 \phantom{{}+ x_3} &= 1 \\
x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= -1
\end{aligned}
$$

Kan skrives på matrix form

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}
$$

Koefficient matrix

Udvidet (koefficient) matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

Generelt lineart ligningssystem: $A\vec{x} = \vec{b}$

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \vec{b} \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

Ligning 3 − ligning 1 :

$$x_2 + x_3 = -1$$

Ligning 2 − 2 (ligning 1) :

$$-x_2 - 2x_3 = 1$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

$\Updownarrow$ adder ligning 3 til ligning 2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

$\Updownarrow$ adder ligning 2 til ligning 3

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_3 = 0 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$\Updownarrow$ gang ligning 2 med -1

omlyt ligning 2 og ligning 3

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$\Updownarrow$ Trek ligning 2 og ligning 3 fra ligning 1

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Ligningssystemet blev løst ved:

1. ombytte to ligninger

2. gange ligning nr. i med et tal $c \neq 0$

3. addere $c \cdot$(ligning nr. i) til ligning nr. j