Matrix-vektor-produkt

Hvis $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n]$ er en $m \times n$ matrix med søjler $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ så er $A\mathbf{v}$ vektoren

$$A\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + \ldots + v_n\mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m.$$

Alternativ beregning

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ 70 \\ * \end{bmatrix}$$

$70 = 5 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 4.$

Indgang nr. i i $A\mathbf{v}$ fås som prikprodukt af A's række nr. i og $\mathbf{v}$.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{bmatrix}$$

Udvalgte **regneregler**:

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Hvis $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ så er $I_n\mathbf{v} = \mathbf{v}$, hvor I_n er $n \times n$ identitetsmatricen.

Hvis $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_n]$ så er $A\mathbf{e}_j = \mathbf{a}_j$, hvor $\mathbf{e}_j$ er den j'te standardvektor i $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{u}_2 & \vec{a}_3 & \vec{a}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

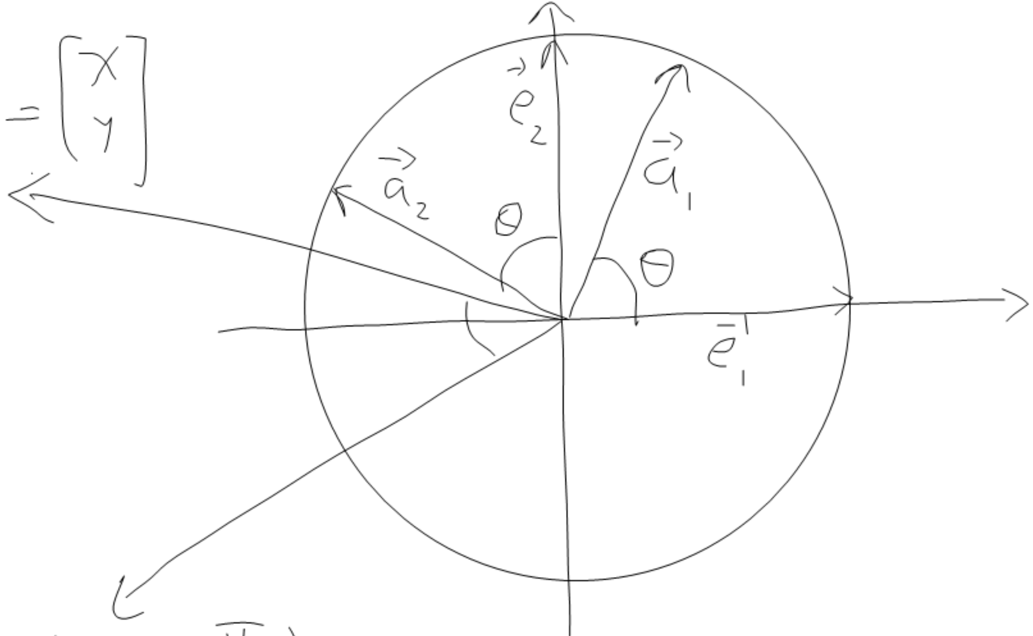
$$0 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + 1 \cdot \vec{a}_3 + 0 \cdot \vec{a}_4 = \vec{a}_3$$

$(A + B)\mathbf{v} = A\mathbf{v} + B\mathbf{v}$

$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$

$Ac\mathbf{v} = cA\mathbf{v}$

$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$



$\vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$

$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$

$\vec{a}_2 = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$

$\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin\theta$

$\vec{v}$ roteres over i $\quad x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 =$

$$\begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A_\theta \vec{v}$$

hvor $\quad A_\theta = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

Lineære ligningssystemer, rækkeoperationer

En **lineær ligning** er en ligning på formen

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

hvor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er variable (ubekendte) og $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ faste (kendte) tal.

F.eks.

$a_1x_1 + a_2x_2 = b$ eller $a_1x + a_2y = b$ som er ligningen for en linie i planen.

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ eller $a_1x + a_2y + a_3z = b$ som er ligningen for en plan i rummet.

Et **lineært ligningssystem** består af et antal (f.eks. m) lineære ligninger, der alle har de samme variable:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Ligningssystemet kan også skrives som

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Eller som $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, hvor

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

A kaldes **koefficientmatricen** for ligningssystemet.

Den **udvidede koefficientmatrix** (totalmatrix) er

$$[A\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Vi siger at et ligningssystem er **konsistent** hvis det har mindst én løsning. Ellers er det **inkonsistent**.

Eksempel: To lineære ligninger med to ubekendte x og y: De to ligninger er ligning for to linier, hhv. ℓ_1 og ℓ_2.
Tre muligheder:

- De to ligninger skærer hinanden i ét punkt, (a, b). Så er $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ en løsning. Dette er den eneste løsning.

- Linierne ℓ_1 og ℓ_2 er parallelle og skærer ikke hinanden. Ligningssystemet har ingen løsning. Det er inkonsistent.

- $\ell_1 = \ell_2$. Løsningsmængden er uendelig.

Elementære rækkeoperationer:

1. ombyt række i og række j: $\quad r_i \leftrightarrow r_j$

2. gange række i med tal $c \neq 0$: $\quad cr_i \to r_i$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{2R_2 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$\frac{1}{2}R_2 \to R_2$

3. adder c gange række i til række j: $\quad r_j + cr_i \to r_j$

Hvis matricen B fremkommer fra matricen A ved én af disse rækkeoperationer så kan A fås fra B ved anvendelse af henholdsvis

$$r_i \leftrightarrow r_j, \quad \frac{1}{c} r_i \to r_i, \quad r_j - cr_i \to r_j.$$

EKS

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 7 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= -4 \\ x_1 \qquad - 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Udvidet matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 7 \\ -1 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - 2R_1 \to R_3]{R_2 + R_1 \to R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2 \to R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 + R_3 \to R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_3 \to R_3}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{1} & 0 & 0 & 5 \\ 0 & \underline{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = -1$$

$$x_3 = 1$$

En matrix siges at være på trappeform (række echelon form) hvis

- rækker med kun 0'er står nederst

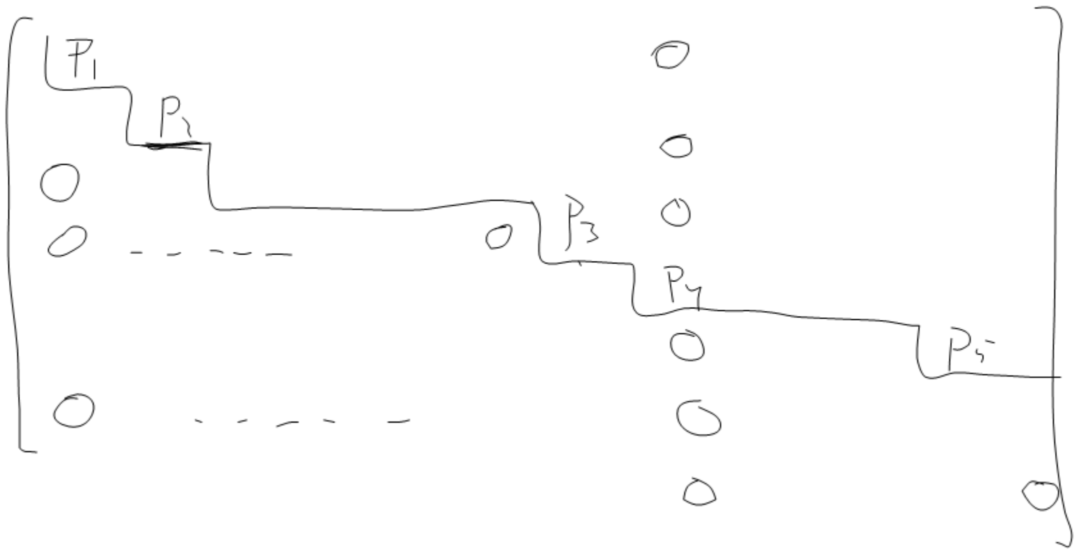
- første tal$\neq$ 0 i række nr. j (pivot-position) er til højre for pivot i række nr.$j-1$

$\hookrightarrow p_1 \cdots p_5$

Matricen er på reduceret trappeform (reduceret række echelon form) hvis også

- alle pivot positioner er 1

- alle tal over pivot er 0.



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

reduced trapeform

Sætning 1.4: For enhver matrix A findes der én og kun én matrix R på reduceret trappeform, der kan fås fra A ved et antal elementære rækkeoperationer,
skriv $R = \texttt{rref}(A)$.

Hvis $\texttt{rref}([A \ \mathbf{b}]) = [R \ \mathbf{c}]$
så har ligningssytemerne $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ og $R\mathbf{x} = \mathbf{c}$ samme løsninger.

EKS

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad & -2x_3 = 1 \\ x_2 & + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 & - 3x_3 = 4 \end{aligned}$$

Udvidet matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_1 \to R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2 \to R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 - 2x_3 = 1 \qquad x_1 = 2x_3 + 1$$

$$x_2 + x_3 = 2 \qquad x_2 = -x_3 + 2$$

x_3 er fri variabel

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>Eks</u> Udvidet matrix for ligningssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ligning 3: $\quad 0 = 1 \quad$, inkonsistent

1.4 Gauss-elimination

A: vilkårlig matrix, find rref(A)

Fase 1: $A \longrightarrow$ trappeform

betragt søjler: venstre $\rightarrow$ højre

Fase 2: trappeform $\longrightarrow$ rref(A)

søjler: højre $\rightarrow$ venstre

Betragt søjle 1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & -4 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -4 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_1 \rightarrow R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_2 \rightarrow R_3}$$

Søjle 1 færdig

Søjle 2 færdig

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \longleftrightarrow R_4}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{2} & -2 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Trappeform

Fase 2

$$\xrightarrow[R_2 - 2R_3 \to R_2]{R_1 - 5R_3 \to R_1} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$
\xrightarrow{R_1 - 4R_2}
\begin{pmatrix}
2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{\frac{1}{2}R_1 \to R_1}
\begin{pmatrix}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$