Trappeform, Gausselimination

En matrix siges at være på **trappeform** (række-echelon form) hvis

1. rækker der kun har 0'er står nederst i matricen,

2. første indgang forskellig fra 0 i en række (den **ledende indgang** i rækken) står i en søjle til højre for første indgang forskellig fra 0 i rækken ovenover.

Hvis indgang (i, j) i en matrix på trappeform er en ledende indgang i en ikke-0 række, så siges denne indgang at være en **pivot**.

Matricen A siges at være på **reduceret trappeform** (reduceret række-echelon form) hvis den er på trappeform og opfylder

4. hvis a_{ij} er den ledende indgang i række i så er $a_{\ell j} = 0$ for alle $\ell \neq i$

5. den ledende indgang i hver række er 1.

Enhver matrix B kan ved et antal elementære rækkeoperationer omskrives til en *entydig* matrix på reduceret trappeform.

Denne entydige matrix benævnes $\mathtt{rref}(B)$.
(Forkortelse for reduced row echelon form; MATLAB notation).

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Trappeform

pivot

ikke - reduceret

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

ikke trappeform

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reduceret trappeform

Gausselimination:
1.: omskrivning af matrix til trappeform.
Betragt søjlerne én ad gangen fra venstre mod højre.

Hvis første søjle er en 0-søjle, så se bort fra den og fortsæt med næste søjle.

Hvis første søjle har indgange $\neq 0$, så foretag eventuelt rækkeombytning sådan at øverste indgang er $\neq 0$. Denne indgang er en pivotindgang. Adder et multiplum af første række til hver af de andre rækker, sådan alle tal under pivotindgangen er 0.
Se bort fra første søjle og første række og fortsæt med næste søjle indtil alle søjler er behandlet.

2.: Omskrivning af matrix på trappeform til reduceret trappeform: Betragt pivotsøjlerne fra højre mod venstre.

Løsning af lineære ligningssystemer:

Hvis $[A\ \mathbf{b}]$ er den udvidede koefficientmatrix for et ligningssystem og $\texttt{rref}([A\ \mathbf{b}]) = [R\ \mathbf{c}]$ så har ligningssystemet med udvidet koefficient matrix $[R\ \mathbf{c}]$ de samme løsninger som det oprindelige ligningssytem.

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\Updownarrow$$

$$R\vec{x} = \vec{c}$$

Løsning af ligningssystem med udvidet koefficientmatrix på reduceret trappeform:
Hvis der er pivot i sidste søjle så er ligningssytemet inkonsistent.
Ellers er ligningssystemet konsistent og

hvis søjle nr. j ikke har pivot så er x_j er **fri variabel** og

hvis søjle nr. j har pivot så kan x_j udtrykkes ved hjælp af de frie variable (og tal i matricen).

<u>EKS</u> Udvidet matrix for ligningssystem

$$\left[\begin{array}{cccc:c} \underline{1} & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \underline{1} & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & -2 & \underline{0} \end{array}\right]$$

Pivot søjler

$$\xrightarrow{\substack{R_2 - R_1 \to R_2 \\ R_3 + R_1 \to R_3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 - R_2 \to R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} \underline{1} & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \underline{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} \end{array}\right]$$ Trappeform

Pivot i sidste søjle: inkonsistent

EKS

Ligningssystem med matrix på reduceret trappeform

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \underline{\underline{1}} & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & \underline{\underline{1}} & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{\underline{1}} & -1 & 3 \end{array}\right] = \left[A \quad \vec{b} \right]$$

Konsistent

Ikke pivot i søjle 3 og 5

Frie variable x_3 og x_5

$$\begin{aligned} x_1 \quad + x_3 - x_5 &= 2 \\ x_2 - x_3 + x_5 &= 1 \\ x_4 - x_5 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-x_3+x_5+2\\x_3-x_5+1\\x_3\\x_5+3\\x_5\end{bmatrix} = x_3\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+x_5\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\1\\0\\3\\0\end{bmatrix}$$

$$\text{rank } A = 3$$

$$\text{nullity } A = 2$$

Definition: **Rangen** af en matrix A er antallet af pivotindgange i matricen, skrives rank A.

Definition: **Nulliteten** af en matrix A er antallet af søjler uden pivot; skrives nullity A.

Hvis A har n søjler så er

$$\text{rank } A + \text{nullity } A = n.$$

Hvis A er koefficient matrix for et *konsistent* ligningssystem så er antallet af frie variable i løsningen: nullity A.

Mængden udspændt af $\mathcal{S}$

$\mathcal{S} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$: en mængde af vektorer i $\mathbb{R}^n$.

Mængden af alle vektorer i $\mathbb{R}^n$, der er linear kombination af vektorerne i $\mathcal{S}$ kaldes mængden (rummet) udspændt af $\mathcal{S}$.
Skrives: Span $\mathcal{S}$.

EKS

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Er $\operatorname{span} S = \mathbb{R}^3$

Er

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

konsistent for alle a, b, c

Udvidet matrix:

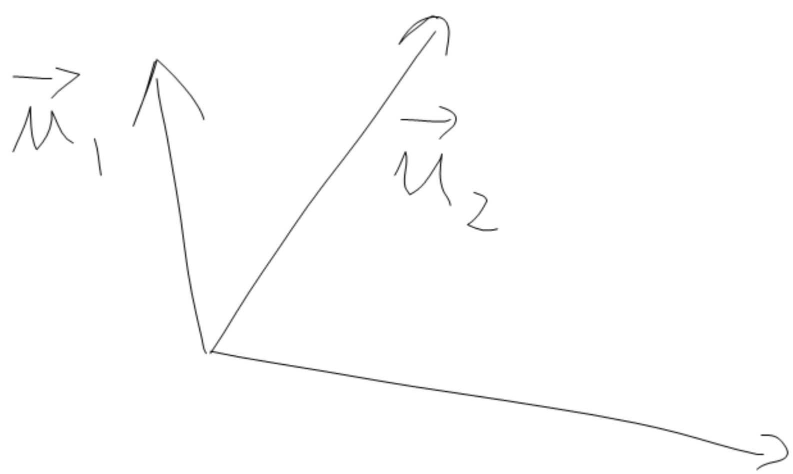
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \end{array}\right]$$

$$R_2 - R_1 \to R_2 \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 & b-a \\ 0 & 1 & 1 & c \end{bmatrix}$$

$$R_3 + R_2 \to R_3 \quad \longrightarrow \quad \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} \underline{1} & 1 & 0 \\ 0 & \underline{-1} & 1 \\ 0 & 0 & \underline{2} \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} a \\ b-a \\ c+b-a \end{matrix} \end{array}\right]$$

Ingen pivot i sidste søjle, konsistent

Ja, $\operatorname{Span} S = \mathbb{R}^3$



$\vec{u}_1$
$\vec{u}_2$

$S = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ vektorer i $\mathbb{R}^n$.
$A = [\mathbf{u}_1 \ \ldots \ \mathbf{u}_k]$ en $n \times k$ matrix.

Sætning 1.6.

Span $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\} = \mathbb{R}^n$

$\Updownarrow$

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er konsistent for alle $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^n$

$\Updownarrow$

A har pivotposition i alle rækker.

Hvis span $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\} = \mathbb{R}^n$ så er
$n =$ antal rækker $=$ antal pivot positioner $\leq$ antal søjler $= k$
altså $n \leq k$.

EKS $\quad S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Linear kombination af S

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

$$c_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} + c_3\left(3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\right) =$$

$$(c_1 + 3c_3)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + (c_2 - c_3)\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

$$\operatorname{span} S = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

Sætning 1.7.

$$\text{span }\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}\} = \text{span }\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$$

$$\Updownarrow$$

$\mathbf{v}$ ligger i span $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$.

Afsnit 1.7: lineær uafhængighed.

Ønskes: $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ hvor ingen $\mathbf{u}_i$ er linear kombination af de andre $k-1$ vektorer.

Definition

$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ vektorer i $\mathbb{R}^n$.

Hvis ligningssystemet

$$x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \ldots + x_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$$

kun har løsningen $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$

så er $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ lineært uafhængige.

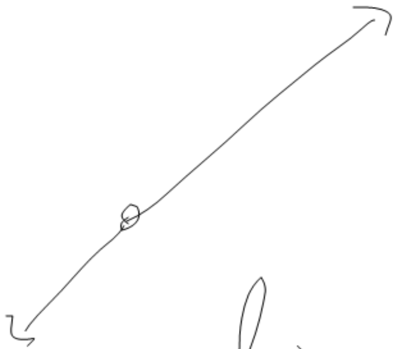
Ellers, altså hvis

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$$

hvor mindst ét tal c_i er $\neq 0$, så er $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ lineært afhængige.

Hvis $c_k \neq 0$ så er

$$\vec{u}_k = -\frac{c_1}{c_k}\vec{u}_1 - \ldots$$



lineair afhankelijk

lineair onafhankelijk