Span og lineær uafhængighed

$\mathcal{S} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$: en mængde af vektorer i $\mathbb{R}^n$.

$c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 \ldots$

Mængden af alle vektorer i $\mathbb{R}^n$, der er linear kombination af vektorerne i $\mathcal{S}$ kaldes mængden (underrummet) udspændt af $\mathcal{S}$.
Skrives: Span $\mathcal{S}$.

En vektor $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ ligger i Span $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$
hvis og kun hvis
$[\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_k\ \mathbf{v}]$ ikke har pivotposition i sidste søjle.

$x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \ldots = \vec{v}$

En mængde $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ af vektorer i $\mathbb{R}^n$ siges at være

lineært afhængig hvis der findes skalarer $c_1, c_2, \ldots, c_k$, som ikke alle er 0 sådan at $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 \ldots + c_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$.

lineært uafhængig hvis ligningen

$$x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 \ldots + x_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$$

kun er opfyldt når $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_k = 0$.

Enhver mængde af vektorer er enten lineært afhængig eller lineært uafhængig, men ikke både lineært afhængig og lineært uafhængig.

Ovenstående ligning er **homogen**, idet højresiden er nulvektoren.

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} \qquad 3\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \vec{0}$$

lineært afhængige.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

lineært uafhængige.

Når en løsningen til et homogent ligningssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ skrives på vektorform med metoden fra afsnit 1.3, så skrives den som linear kombination af lineært uafhængige vektorer, (forudsat at der er frie variable).

$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$: en mængde af vektorer i $\mathbb{R}^n$.

(Sætning 1.6)
Span $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\} = \mathbb{R}^n$
hvis og kun hvis
$A = [\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_k]$ har pivotposition i alle rækker.

(Sætning 1.8)
$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ er lineært uafhængig
hvis og kun hvis
$A = [\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_k]$ har pivotposition i alle søjler.

Er $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ lineært uafhængige

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 6 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} \underline{1} & 3 & 2 \\ 0 & \underline{1} & 2 \\ 0 & 0 & \underline{4} \end{bmatrix}$$

Lineært uafhængig, pivot i alle søjler

Sætning 1.7
Span $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ = Span $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}\}$
hvis og kun hvis
$\mathbf{v} \in$ Span $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$.

Sætning 1.9
$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ er lineært afhængig
hvis og kun hvis
enten $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ eller der findes $j \geq 2$ sådan $\mathbf{u}_j$ er linear kombination af $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{j-1}$.

Hvis søjle j i $A = [\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_k]$ ikke er en pivotsøjle så er $\mathbf{u}_j$ en linear kombination af $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{j-1}$.

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[\vec{u}_1 \ldots \vec{u}_5\right] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} \underline{1} & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pivot süjler: 1, 2, 4

$$\mathrm{Span}\{\vec{u}_1 \cdots \vec{u}_5\} = \mathrm{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_4\}$$

$$\vec{u}_3 = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \quad , \quad \vec{u}_5 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_4$$

Appendix B

Definition
A og B er mængder.
En funktion f fra A til B, skrives $f : A \to B$
knytter til ethvert x i A et $f(x)$ i B.

EKS

$A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + 2$

EKS

$A =$ studerende i LIAL, hold 3

$B = \mathbb{R}$

$f(x) =$ x's studienummer.

1–1

ikke surjektiv

$$C = \{-3, 00, 02, 4, 7, 10, 12\}$$

$$g : A \to C$$

$$g(x) = x\text{'s eksamenskarakter.}$$

<u>EKS</u>

$$A = \mathbb{R}^n, \quad B = \mathbb{R}$$

$$f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|$$

Betragt en funktion $f : A \to B$

A kaldes definitionsmængden (eng.: domain)

Billedmængden (eng.: range), skrives $f(A)$
består af alt der er på formen $f(x)$ hvor x gennemløber A

B kaldes ... (eng.: codomain), indeholder billedmængden $f(A)$.

En funktion $f : A \to B$ siges at være

1 − 1

- injektiv (eng.: one-to-one) hvis

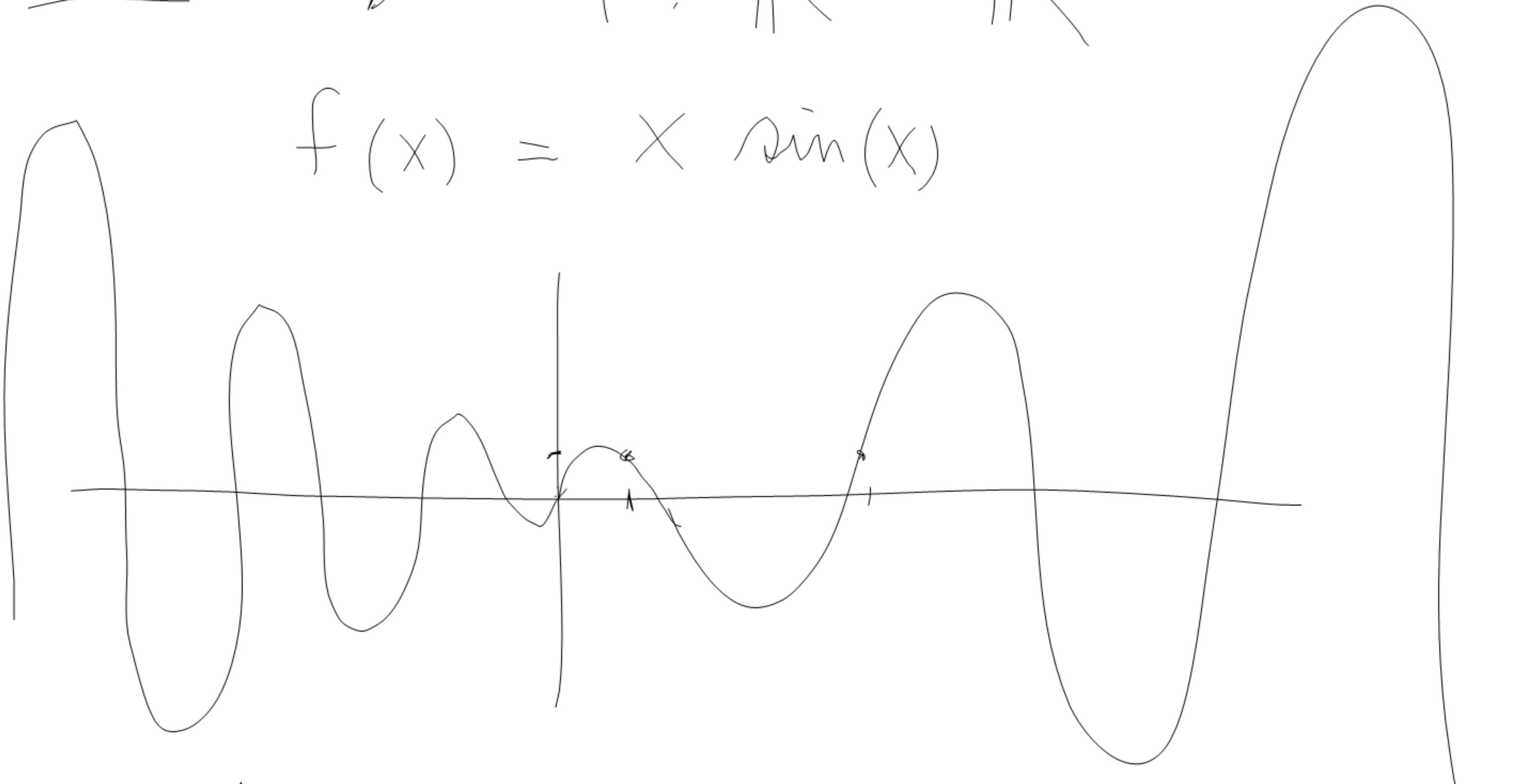
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

på

- surjektiv (eng.: onto) hvis $f(A) = B$, altså hvis der for alle y i B findes x i A som opfylder $f(x) = y$.

EKS 3 $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x \sin(x)$$



ikke 1-1 , surjektiv

2.7

Funktion (transformation)

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

EKS

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

DEF

A : $m \times n$ matrix

Funktionen $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

der opfylder $T_A(\vec{x}) = A\vec{x}$

kaldes en matrix-transformation

EKS

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$T_A\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ roteret 90°

<u>Sætning 2.7</u> $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

En matrix transformation T_A opfylder

1. $T_A(\vec{u}+\vec{v}) = A(\vec{u}+\vec{v}) =$

$$A\vec{u} + A\vec{v} = T_A(\vec{u}) + T_A(\vec{v})$$

2. $T_A(c\vec{u}) = c\,T_A(\vec{u})$

DEF

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kaldes en lineær transformation hvis

1. $T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

2. $T(c\vec{u}) = cT(\vec{u})$

EKS $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ en lineær transformation der opfylder $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ og $T\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Find $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}\right) =$$

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}\right) =$$

$$\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = T\left(-1\cdot\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}\right) = -1\cdot T\left(\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}\right) = -\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\-4\\-5\end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = T\left(x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$T\left(x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + T\left(x_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = x_1 T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_2 T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= x_1\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= T_A\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) \quad \text{hvor } A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(\vec{e}_1) & T(\vec{e}_2) \end{bmatrix}$$

Standardmatrix for T

Sætning 2.8
En lineær transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ opfylder

1. $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

2. $T(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aT(\mathbf{u}) + bT(\mathbf{v})$

3. $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})$