Funktioner, lineære transformationer

En funktion (transformation) $f : A \to B$ knytter til hvert element $x \in A$ et entydigt element $f(x) \in B$.

A kaldes definitionsmængden (domænet) for f.
B kaldes (codomænet) for f.
$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ kaldes billedmængden (værdimængden, range) af f.

(Der findes ikke noget anerkendt dansk ord for codomain.)

Lad $f : A \to B$ være en funktion, hvor A og B er vilkårlige mængder.

f siges at være **injektiv** (eller enentydig; engelsk: one-to-one, kan evt. skrives $1-1$) hvis $f(x_1) \neq f(x_2)$ når x_1 og x_2 er forskellige elementer i A.

f siges at være **surjektiv** (eller på; engelsk: onto) hvis der for ethvert element $b \in B$ findes et element $a \in A$ så $f(a) = b$.

f: "fra x-værdier til y-værdier"

f er en funktion:

"for ethvert x er der et (entydigt) y"

f er surjektiv:

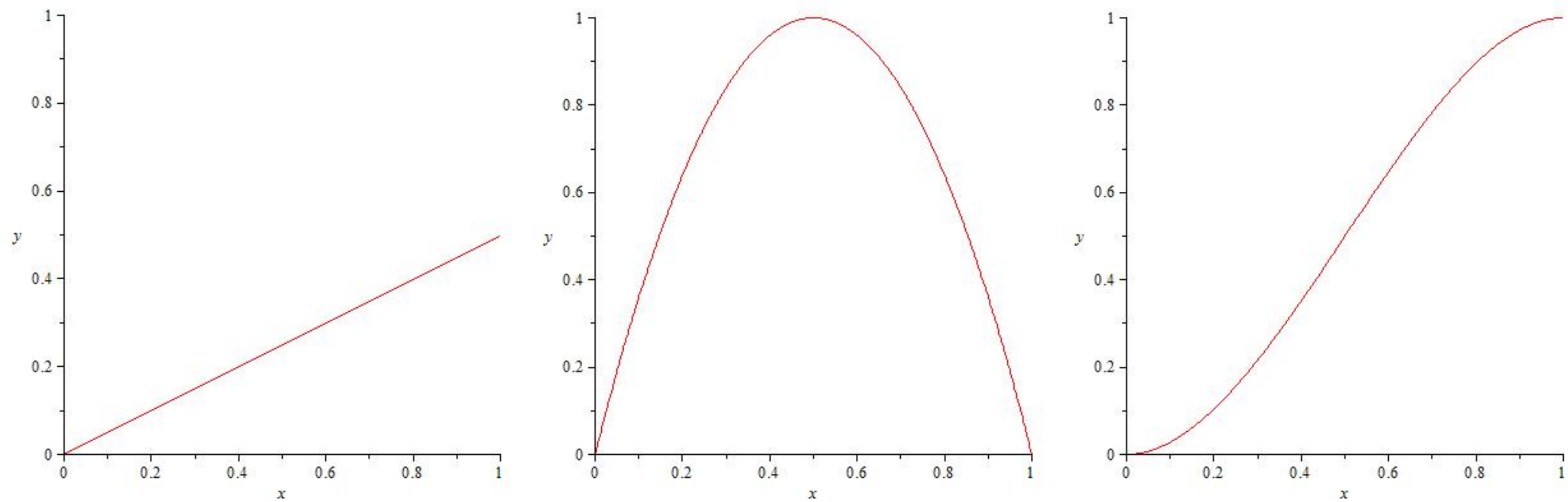
"for ethvert y er der mindst ét x"

f er injektiv:

"for ethvert y er der højst ét x"

f er **bijektiv** (altså injektiv og surjektiv):

"for ethvert y er der præcis ét x"



Tre funktioner hvor $A = B = [0, 1]$. Disse er henholdsvis

injektiv, men ikke surjektiv

surjektiv, men ikke injektiv

injektiv og surjektiv.

Sammensat funktion:

Hvis $f : A \to B$ og $g : B \to C$
så er $g \circ f : A \to C$ funktionen, der opfylder $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Hvis $f : A \to B$ er både injektiv og surjektiv så findes der for ethvert element $b \in B$ et entydigt element $a \in A$ som opfylder $f(a) = b$. Dette entydige element skrives $a = f^{-1}(b)$.
Så er $f^{-1} : B \to A$ også en funktion. Den kaldes f's **inverse funktion**.

$f^{-1} \circ f : A \to A$ og $f \circ f^{-1} : B \to B$ er funktioner der opfylder $(f^{-1} \circ f)(a) = a$, for alle $a \in A$ og $(f \circ f^{-1})(b) = b$ for alle $b \in B$.

En funktion $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ siges at være en **lineær transformation** hvis

- $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$, for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ og

- $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$ for alle $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ og $c \in \mathbb{R}$.

En transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er lineær hvis og kun hvis

$$T(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aT(\mathbf{u}) + bT(\mathbf{v})$$

for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ og alle $a, b \in \mathbb{R}$.

EKS $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ 5x_1 - 2x_2 \\ x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} 2(u_1 + v_1) + 3(u_2 + v_2) \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u_1 + 3u_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2v_1 + 3v_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right)$$

T er linear.

En lineær transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ opfylder

$$T(a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_k\mathbf{u}_k) = a_1T(\mathbf{u}_1) + \ldots a_kT(\mathbf{u}_k)$$

En lineær transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ opfylder $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Hvis A er $m \times n$ matrix så defineres $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ved $T_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$. T_A siges at være en **matrix transformation**.

Enhver matrix transformation er en lineær transformation.

Hvis $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er en lineær transformation og

$$A = [T(\mathbf{e}_1)\ T(\mathbf{e}_2) \ldots T(\mathbf{e}_n)]$$

så er $T(\mathbf{v}) = T_A(\mathbf{v})$ for alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.
A kaldes **standardmatricen** for T.

Enhver lineær transformation er altså en matrix transformation.

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ 5x_1 - 2x_2 \\ x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Standard matrix for T:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \left[T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \right]$$

Lad $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være en lineær transformation og lad A være dens standardmatrix. A er $m \times n$.

$A = [\vec{a}_1, \ldots \vec{a}_n]$

Billedmængden af T er rummet udspændt af søjlerne i A.

$\text{span}\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$

Følgende betingelser er ækvivalente

- T er **surjektiv**
- A's søjler udspænder $\mathbb{R}^m$
- A har pivot i alle rækker
- rank $A = m$

EKS T med standardmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Billedmængde (range): $\text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$

$$A \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ikke surjektiv, ikke pivot i række 3.

T er injektiv, da der er pivot i alle søjler

Lad $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være en lineær transformation og lad A være dens standardmatrix, altså $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. A er $m \times n$.
Nulrummet af T er mængden

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \underbrace{T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}}_{}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \underbrace{A\mathbf{x} = \mathbf{0}}_{}\}.$$

Følgende betingelser er ækvivalente

- T er **injektiv**
- nulrummet af T er $\{\mathbf{0}\}$
- A har pivot i alle søjler

$$T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 \end{bmatrix}$$

Standardmatrix for T:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ikke surjektiv, ikke injektiv

Nulrummet $\quad A\vec{x} = \vec{0}$

$$[A \mid \vec{0}] \xrightarrow{\text{rref}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

x_3, x_4 frie variable

$x_1 + 2x_3 - x_4 = 0, \quad x_1 = -2x_3 + x_4$

$x_2 - x_3 + x_4 = 0, \quad x_2 = x_3 - x_4$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_3 + x_4 \\ x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nulrummet: $\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Billedrum: $\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$= \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

da A har pivot i søjle 1 og 2.

2.1

A : $m \times n$ matrix

Hvis $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ så er $A\vec{x} \in \mathbb{R}^m$

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_p \end{bmatrix} \quad n \times p \text{ matrix}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_p \end{bmatrix}$$

$$\vec{w} = B\vec{v} = v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 + \cdots + v_p\vec{b}_p \in \mathbb{R}^n$$

Kan udregne $A\vec{w} = A(B\vec{v}) \quad \in \mathbb{R}^m$

$$A(B\vec{v}) = A\left(v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 + \dots + v_p\vec{b}_p\right) =$$

$$Av_1\vec{b}_1 + Av_2\vec{b}_2 + \dots + Av_p\vec{b}_p =$$

$$v_1(A\vec{b}_1) + v_2(A\vec{b}_2) + \dots + v_p(A\vec{b}_p) =$$

$$\begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \dots & A\vec{b}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_p \end{bmatrix}$$

<u>Definition</u>: $AB = \begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \dots & A\vec{b}_p \end{bmatrix}$

kun defineret hvis
antal søjler i A = antal rækker i B

Så er $$A(B\vec{v}) = (AB)\vec{v}$$

EKS

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$3 \times 2 \qquad\qquad 2 \times 2$$

$$AB = \begin{bmatrix} A\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} & A\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 22 \\ 32 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot(-1)+3\cdot 4 \\ 4\cdot(-1)+5\cdot 4 \\ 6\cdot(-1)+7\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 16 \\ 22 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 12 & 10 \\ 22 & 16 \\ 32 & 22 \end{bmatrix}$$

BA ikke defineret

$$B = \left[\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \ldots\ldots \ \vec{b}_p \right]$$

Indgang (i,j) i AB =

Komponent nr i i $A\vec{b}_j$ =

$(A\text{'s række } i) \cdot \vec{b}_j$ =

$(A\text{'s række } i) \cdot (B\text{'s søjle } j)$

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}} \overset{B}{\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{bmatrix}$$