Matrixmultiplikation

Hvis A er en $m \times n$ matrix og $B = [\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_p]$ er en $n \times p$ matrix så defineres **matrixmultiplikation** af A og B ved

$$AB = [A\mathbf{b}_1 \ldots A\mathbf{b}_p].$$

Bemærk at hvis (antal søjler i A) $\neq$ (antal rækker i B) så er AB ikke defineret.
Anden metode til beregning af AB:

$$\text{indgang } (i,j) \text{ i } AB = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj},$$

altså prikproduktet af A's række nr. i og B's søjle nr. j.

A en $m \times n$ matrix.
B en $r \times p$ matrix.

Produktet AB kan udregnes hvis $n = r$
og resultatet er så en $m \times p$ matrix.

$$\begin{array}{cccc}
5 \times 4 & 4 \times 6 & & 5 \times 6 \\
\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ * & * & * & * \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} * & 1 & * & * & * & * \\ * & 2 & * & * & * & * \\ * & 3 & * & * & * & * \\ * & 4 & * & * & * & * \end{bmatrix} & = &
\begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & 70 & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}
\end{array}$$

$70 = 5 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 4.$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 4 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 4 \cdot 6 & 1 \cdot 4 + 4 \cdot 3 \\ 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 6 & 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 26 & 16 \\ 13 & 22 & 17 \end{bmatrix}$$

Udvalgte regneregler (når matricernes størrelse gør at udtrykkene er defineret):

$$A(BC) = (AB)C \qquad = ABC$$
$$A(B+C) = AB + AC$$
$$(A+B)C = AC + BC$$
$$I_m A = A I_n = A$$
$$(AB)^T = B^T A^T.$$

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrixmultiplikation er *ikke kommutativ*. Altså: det er almindeligt at

$$AB \neq BA$$

når begge produkter er defineret.

Hvis $B = [\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_p]$ er en $n \times p$ matrix og $C = [\mathbf{c}_1 \ldots \mathbf{c}_q]$ er en $n \times q$ matrix så indføres en $n \times (p+q)$ matrix

$$[B\ C] = [\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_p\ \mathbf{c}_1 \ldots \mathbf{c}_q].$$

Hvis A er en $m \times n$ matrix så er

$$A[B\ C] = [A\mathbf{b}_1 \ldots A\mathbf{b}_p\ A\mathbf{c}_1 \ldots A\mathbf{c}_q] = [AB\ AC].$$

Sammensat funktion

Hvis $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ og $S : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^p$ er lineære transformationer med standardmatricer henholdsvis A og B, så er

$$S \circ T = ST : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p$$

$S(T(\vec{x}))$

$= ST(\vec{x})$

en lineær transformation med standardmatrix BA.

Altså

$$T_B T_A = T_{BA}.$$

EKS: $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_3 \\ -x_1 + 2x_2 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix} \qquad \text{lineær}$$

Standardmatrix for T:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$S\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_2 + x_3 \end{bmatrix} \qquad \text{lineær}$$

Standardmatrix for S:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$ST : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$ST\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = S\left(T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right)\right) = S\left(\begin{bmatrix} x_1 + x_3 \\ -x_1 + 2x_2 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix}\right) =$$

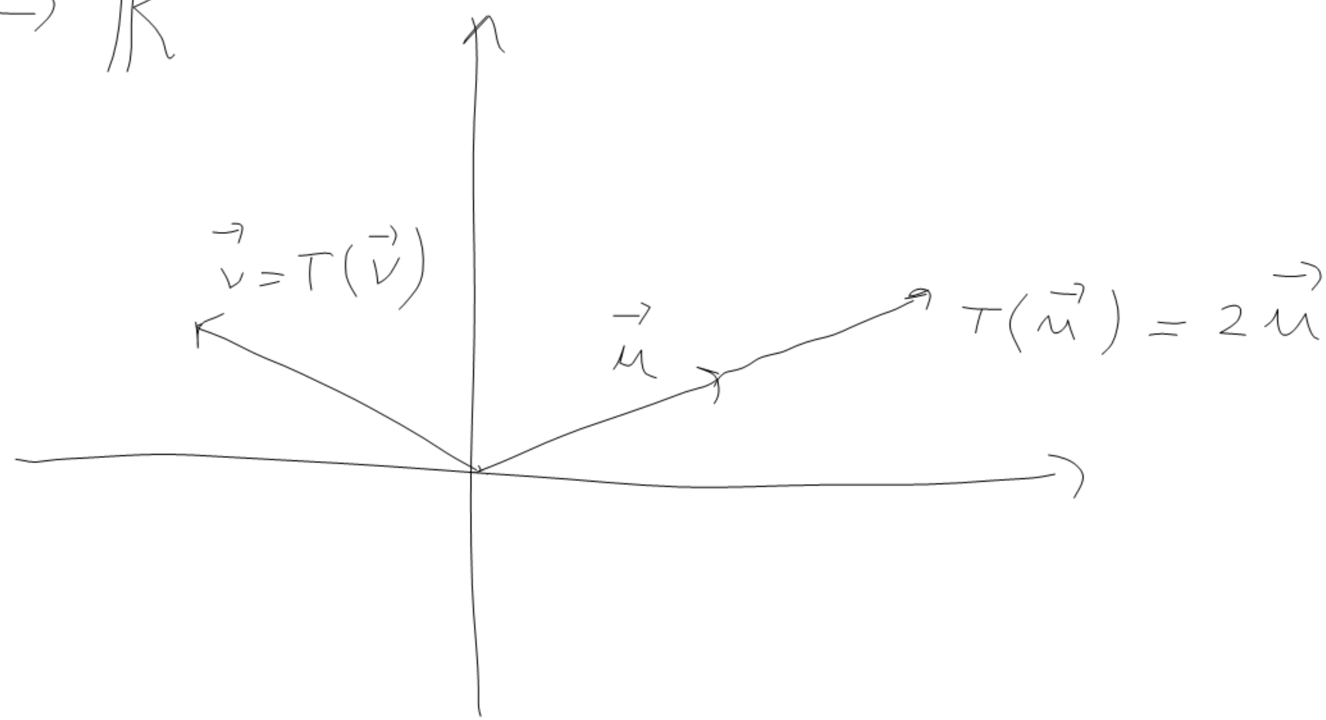
$$\begin{bmatrix} (x_1 + x_3) + (-x_1 + 2x_2) - (x_2 + x_3) \\ 2(-x_1 + 2x_2) + (x_2 + x_3) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Standardmatrix for ST

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



2.3

Hvis $A \xrightarrow{cR_i \to R_i} B$

så er $B = EA$ hvor

$$E = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{rekke } i \\ \\ \\ \end{array}$$

(A og B har n rekker)

$$I_n \xrightarrow{cR_i \to R_i} E$$

Definition

En $n \times n$ matrix E, der fås fra I_n ved én elementær rækkeoperation kaldes en elementær matrix.

EKS

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 + 2R_3 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 + 2R_3 \to R_1} \begin{bmatrix} 4+2\cdot 1 & 5+2\cdot 2 & 6+2\cdot 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+2\cdot 1 & 5+2\cdot 2 & 6+2\cdot 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

EKS

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = E$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Generell

Hvis E fremkommer fra I_n ved én radoperasjon

og B kommer fra A ved samme radoperasjon

så er $B = EA$

A : matrise

radoperasjoner

$$A \longrightarrow E_1 A \longrightarrow E_2(E_1 A) \longrightarrow E_3 E_2 E_1 A$$

$$\longrightarrow \ldots \longrightarrow E_k \ldots E_3 E_2 E_1 A = \text{rref}(A)$$

hvor $E_1, \dots, E_k$ er elementær matricer.

Invers til tal x: $\frac{1}{x}$ opfylder $x \cdot \frac{1}{x} = 1$

Definition

A: $n \times n$ matrix

Hvis der findes B en $n \times n$ matrix der opfylder $AB = I_n$ og $BA = I_n$ så siger vi at A er invertibel

og B er invers til A,
skrives $A^{-1} = B$

desuden er $B^{-1} = A$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

(Sætn. 2.6: nok at én af ligninger opfyldt)

EKS $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

Er B invers til A ?

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\cdot 1 - 2\cdot 2 & 5\cdot 2 - 2\cdot 5 \\ -2\cdot 1 + 1\cdot 2 & -2\cdot 2 + 1\cdot 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$BA = I_2$$

$$A^{-1} = B$$

Sætning 2.7

A, B : invertible $n \times n$ matricer

Så er

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} =$$

$$A I_n A^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$$

AB er invertibel og $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Hvis $A_1, \dots, A_k$ er invertible $n \times n$ matricer $A = A_1 A_2 \dots A_k$

Så er $A^{-1} = A_k^{-1} A_{k-1}^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}$